A HILBERT-FÉLE BIZONYÍTÁSELMÉLET CÉLKITŰZÉSEI, MÓDSZEREI ÉS EREDMÉNYEI.[1]

Közmondásos a matematika csalhatatlanságába vetett hit: «olyan biztos, mint hogy kétszer kettő négy», mondjuk valamiről annak kifejezésére, hogy nem fér hozzá kétség. Talán csak az orvostudományban bíznak még hasonló mértékben a laikusok. Az orvos, betege érdekében is, csalhatatlannak mondja módszereit; egymás között azonban az orvosok is élesebb kritika alá veszik tudományuk eredményeit. Nekünk matematikusoknak is tisztáznunk kell, hogyan is áll a dolog a matematika csalhatatlanságával.

A matematikának az ad tekintélyt a laikus előtt, hogy a valóságra alkalmazva mindig helyes eredményre vezet; bizonyítéka ennek többek között minden mérnöki számítás szerint épített ház, lift, híd, amely nem dől össze, nem szakad le. Ez a tény azonban nem pusztán a matematikán múlik, hanem a környező világnak egy éppenséggel nem magától értetődő tulajdonságán;[2] e miatt ez a tény másképp nem igazolható, mint empirikusan.

---

[1] A Kir. Magyar Pázmány Péter Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézetének kollokviumán 1939. november 3-án tartott előadás második felének részletes kidolgozása. Az előadás első fele a halmazelmélet elemeiről adott áttekintést; ezeket itt ismerteknek teszem fel.

[2] Valóban, a matematikának a környező világra való minden egyes alkalmazása végelemzésben az idő valamely $f(t)$ függvényének valamely helyen való meghatározását kívánja, a rendelkezésre álló adatok mind az $f(t)$ függvénynek a $t \leqq t_0$ helyeken való viselkedésére vonatkoznak, ahol t_0 a jelen pillanat. Ugyanis mindaz, amit a természetről biztosan tudunk, a multra s a jelenre vonatkozik; ezekből kell — megfelelő elmélet felállítása és esetleg az időt explicite nem is tartalmazó matematikai műveletek útján — egy, rendesen a jövőre, esetleg a multra vonatkozó ismeretlen adatot meghatároznunk. Egy cseppet sem magától értetődő, hogy a szóbanforgó $f(t)$ függvények minden egyes esetben

Ha a gyakorlati alkalmazásoktól eltekintünk, a matematika csalhatatlanságán azt kell értenünk, hogy matematikai módszerek nem vezethetnek egymásnak ellentmondó eredményekre. Ebben sokáig nem is volt okunk kételkedni. Először az infinitézimális számítás vezetett olyan módszerekre, amelyekkel, kellő elővigyázat híján, egymásnak ellentmondó eredményekhez lehetett jutni. Maguk az infinitézimális analízis nagy megalkotói, NEWTON és LEIBNIZ, az elméletnek rohamos, a quantumelméletéhez hasonló fejlődése folyamán nem értek rá a «kellő elővigyázat» szabályait pontosan megfogalmazni; ők maguk azonban, s az analízis nagy rendszerezője, EULER is, intuiciójuktól vezetve, elkerültek minden ellentmondásra vezető okoskodást. Azonban az utánuk jövő másod- és harmadrangú matematikusok gyakran követtek el hibákat az analízis fogalmainak, elsősorban a határérték akkoriban rendesen végtelen sor alakjában jelentkező fogalmának pontatlan használatával. Ezek a pontatlanságok váltották ki a sorelmélet kritikáját, ami CAUCHY, majd WEIERSTRASS kezében az egész analízis exakt megalapozásához vezetett, azáltal, hogy a *végtelen kicsi* és *végtelen nagy* pontatlan fogalmainak szerepét a *végtelen sok* (végtelen sorozat) fogalma vette át.

Hasonlóan gyors fejlődésen ment át a matematika a mult század végén, amikor CANTOR az analízis megalapozására használt fogalmak következetes végiggondolásával és továbbépítésével megalkotta hatalmas művét, a «végtelen sok» tudományát, a halmazelméletet. Ez az elmélet tetszőleges elemekből álló összességekkel, halmazokkal foglalkozik. Jelentősége abban van, hogy egységes rendszerbe foglalja a matematika valamennyi ágát (hasonlóan, mint a MAXWELL-féle elmélet vagy a quantummechanika a fizika

---

olyan függvénykategóriához tartoznak (pl. olyan differenciálegyenlet megoldásai közé), amelyeknél ilyen feladat megoldása lehetséges. (Az egyik legfontosabb eset az, amikor az derül ki, hogy $f(t)$ konstans.) A különbség e tekintetben a klasszikus fizika és a quantumelmélet között pusztán annyi, hogy az $f(t)$ függvénynek a klasszikus fizikában egy-egy rendszerre vonatkozó jelentése van, míg a quantumelméletben csak olyan $f(t)$ függvények szerepelnek, amelyeknek jelentése statisztikai, tehát sok rendszer együttes viselkedésére vonatkozik.

különböző ágait). Valóban, a halmazelmélet segítségével a matematika többi ágainak alapfogalmai is felépíthetők. Így pl. a természetes számokat véges halmazok számosságainak[3] (elemeik számának) tekinthetjük; a számosságok összeadását és szorzását a megfelelő — közös elem nélküli — halmazok egyesítése, ill. a belőlük alkotott párok (két elemű rendezett halmazok) összessége segítségével definiálhatjuk. A negatív számokat a természetes számokból, a törtszámokat pedig az egész számokból alkotott párok segítségével vezethetjük be; az irracionális számokat racionális számok bizonyos halmazaival (DEDEKIND-féle szeletekkel) értelmezhetjük; a komplex számokat viszont valós számokból álló pároknak tekinthetjük. De az analízis egyéb fogalmai is halmazelméleti fogalmak speciális esetei; pl. a végtelen sorozatok speciális rendezett halmazok, a függvények speciális leképezések. Az algebra is bizonyos halmazokkal (testekkel, gyűrűkkel, csoportokkal) foglalkozik; a geometriai alakzatok viszont alapalakzatoknak, pl. pontoknak halmazai s maguk a tér pontjai az analitikus geometria felfogása szerint valós számokból álló háromelemű rendezett halmazok. De nemcsak a matematika különböző *fogalmai* definiálhatók halmazelméleti fogalmakkal, hanem a rájuk vonatkozó *tételek* is bebizonyíthatók a halmazelmélet tételei segítségével, úgyhogy végelemzésben a matematika minden ága a halmazelmélet részének tekinthető. Viszont a halmazelmélet fogalmai (halmaz, rendezés, leképezés stb.) szerepelnek, szerepeltek már jóval CANTOR előtt, a matematika egyéb ágaiban is; sőt számos ág, mint pl. az analízis vagy a topológia, nem is nélkülözheti ezeket a fogalmakat és a velük kapcsolatos halmazelméleti módszereket.

Így megérthetjük, hogy azok a logikai ellentmondások, amelyekhez a halmazelmélet eredeti heurisztikus felfogása, az ú. n. naív halmazelmélet vezetett, nemcsak a halmazelmélet, hanem az egész matematika kritikáját megindították. Ezek közül az ellent-

[3] A halmazelmélet minden — véges vagy végtelen sok elemből álló — halmazhoz rendel «számosságot»; két halmazhoz akkor és csak akkor ugyanazt a számosságot, ha elemeik között kölcsönösen egyértelmű vonatkozás létesíthető.

mondások, ú. n. antinómiák közül legismertebb a következő RUSSELL-féle antinómia. Nevezzünk közönségesnek egy halmazt, ha nem fordul elő elemei között; a név arra utal, hogy a legtöbb halmaz ilyen; pl. a természetes számok halmaza, maga nem lévén természetes szám, nem fordul elő elemei között. Az antinómia létrejöttéhez nem szükséges tudnunk, hogy vannak-e más halmazok is, mint közönségesek; megemlíthetjük azonban, hogy a naív halmazelmélet szerint vannak, pl. az összes halmazok halmaza előfordul elemei között, mert definíciója szerint minden halmaz eleme neki s ő maga is halmaz. Már most a RUSSELL-féle R halmaz az összes közönséges halmazok halmaza; s az antinómiához eljutunk, ha arra a kérdésre akarunk válaszolni, vajjon R közönséges halmaz-e, vagy nem. Ha ugyanis R közönséges halmaz, akkor, a közönséges halmazok definíciója szerint, nem fordul elő elemei között, holott, R definíciója szerint, minden közönséges halmaz eleme R-nek és feltevésünk szerint maga R is közönséges halmaz. Ha viszont R nem közönséges halmaz, akkor, a közönséges halmazok definíciója szerint, előfordul elemei között, holott, R definíciója szerint, csak közönséges halmaz lehet eleme R-nek és feltevésünk szerint R nem közönséges halmaz.

A halmazelméletet, a halmaz fogalmának exaktabbá (s egyúttal szűkebbé) tételével,[4] megszabadíthatjuk ugyan ettől s a többi eddig felmerült antinómiától; ez azonban nem biztosítja azt, hogy újabb ellentmondások nem merülhetnek fel. Sőt, a halmazelmélet antinómiái kétségessé tették, vajjon nem bukkanhatunk-e hasonló ellentmondásra a matematika más területein, pl. az analízisben is. Hiszen azok az ideák, amelyeken pl. az analízis felépül, alig mondhatók plauzibilisebbeknek azoknál, amelyek a halmazelmélet területén ellentmondásra vezettek. Sőt, mint említettük, az analízis éppen azáltal szabadult meg régebbi pontatlanságaitól, hogy alapfogalmait végelemzésben halmazelméleti eszközökkel építette fel újból s egyébként is lépten-nyomon dolgozik halmazelméleti módszerekkel. Azonkívül azok az eljárások, amelyeknek elkerülé-

[4] Ezt az exaktabbá tételt az axiomatikus módszer teszi lehetővé; erre még majd visszatérünk.

sét a halmazelmélet antinómiáinak megszüntetésére filozófiai meggondolások alapján ajánlották, mint pl. valamely dolognak egy olyan összesség segítségével való definiálása, amelynek maga is eleme, nemcsak az analízis számára nélkülözhetetlenek, hanem a matematika minden ágában, még a számelméletben is, lépten-nyomon használatosak.[5] Így a halmazelmélet antinómiái a matematika minden egyes ágának ellentmondásnélküliségét kétségessé teszik.

Ezzel a kétséggel szembeállíthatjuk azt a tényt, hogy sem a számelméletben, sem az exakt módon felépített analízisben, sem a geometriában nem találtak eddig ellentmondásokat. Nem volna azonban következetes dolog ennél a puszta empirikus érvnél megállnunk. Hiszen más területen, pl. a számelméletben, még oly kiterjedt tapasztalatok alapján sem fogadunk el egy állítást tételnek, amíg deduktív módszerrel be nem bizonyítjuk. Így pl. a nevezetes GOLDBACH-féle sejtést, amely szerint minden páros szám felbontható két primszám összegére (ha az 1-et is primszámnak tekintjük), nem ismerjük el számelméleti tételnek; pedig ameddig a primszámtáblázatok terjedelme megengedte, kipróbálták helyességét és így jóval több eseten igazolták, mint ahány matematikai bizonyításon tapasztalták eddig, hogy nem vezet ellentmondásra.

A matematika ellentmondásnélküliségének matematikai módszerekkel való bebizonyítása a HILBERT-féle *bizonyításelmélet* főtárgya. Pontosabban a matematika egyes ágainak ellentmondásnélküliségéről kell beszélnünk; hiszen a matematika fejlődő organizmus, mind újabb és újabb ágai keletkezhetnek. Minden egyes ilyen ágnak, pl. a természetes számok aritmetikájának (számelméletnek), az analízisnek, az elemi geometriának stb. ellentmondásnélkülisége külön-külön bizonyításelméleti probléma.

A bizonyításelmélet első feladata, hogy az e problémákban szereplő fogalmakat pontosan megfogalmazza. Kétségtelen, hogy pontosabb megfogalmazás nélkül is érezzük, mely fogalmak, tételek, problémák tartoznak pl. az aritmetika vagy az analízis körébe; továbbá minden matematikus érez magában képességet arra, hogy

[5] Így pl. lépten-nyomon előfordul, a számelméletben is, hogy valamely számot mint egy számhalmaz legkisebb elemét definiáljuk.

valamely matematikai meggondolásról eldöntse, helyes-e, vagy nem. Ez a képesség elegendő arra, hogy a matematika egy-egy ágában kutatásokat végezzünk; azonban ahhoz, hogy egy-egy ág ellentmondásnélkülisége problémájához *matematikai* módszerekkel hozzáfoghassunk, elengedhetetlenül szükséges, hogy matematikailag megfogalmazzuk, mit értünk a kérdéses ágon (pl. aritmetikán, elemi geometrián) és matematikailag definiáljunk olyan fogalmakat, mint pl. bizonyítás, ellentmondásnélküliség. Ezt a feladatot a bizonyításelmélet teljesen megoldotta, felhasználván az *axiomatikus kutatások* és a *matematikai logika* eredményeit. A bizonyításelméletnek ez a vívmánya, amelyet teljes egészében HILBERTnek köszönhetünk, ismeretelméleti szempontból magában véve is nagyjelentőségű dolog és — hasonlóan a matematika más területein szerepelt olyan feladatokhoz, amelyek addig pontos megfogalmazás nélkül is kézzelfoghatóknak tűnt fogalmak exakt megfogalmazását kívánják — cseppet sem volt olyan könnyű feladat, mint amilyennek utólag látszik. Meg sem lehetett volna oldani az axiomatikus módszernek oly fejlett álláspontról való felfogása nélkül, amelyre HILBERT a geometria alapjaira vonatkozó kutatásai kapcsán jutott; továbbá a matematikai logika eredményeinek a bizonyításelméleti cél szempontjából megfelelő átalakítása és finomítása nélkül, amely munkában BERNAYSt említi HILBERT segítőtársaként.

Csak e vívmány birtokában foghatott hozzá a bizonyításelmélet tulajdonképpeni feladatához: az egyes matematikai diszciplinák ellentmondásnélkülisége kérdésének megoldásához. E téren maga HILBERT az alapvető ideák, a számelmélet, az analízis, sőt a halmazelmélet ellentmondásnélküliség-bizonyítása alapgondolatának megadására szorítkozott, a részletes kidolgozást tanítványaira bízva, akik — s minden bizonyításelméleti kutató HILBERT tanítványának számítható — nagyon sok gondolatot merítettek eddig is és bizonyára meríteni fognak a jövőben is HILBERT alapvető bizonyításelméleti munkáiból.[6] A részletek kidolgozása közben kide-

---

[6] L. elsősorban: D. HILBERT, Neubegründung der Mathematik, *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität,* **1** (1922) 157—177. oldal; Die logischen Grundlagen der Mathematik, *Math. Annalen,* **88** (1923), 151—165. oldal; Über das

rült, hogy a cél (megmutatni, hogy, HILBERT szavaival, a matematika feltevésnélküli tudomány) korántsincs olyan közel, mint ahogy HILBERT látta. Előre nem látható, habár látszólag nem elvi, hanem csak technikai természetű, mégis lényeges nehézségek merültek fel. E nehézségek miatt a bizonyításelmélet az ellentmondásnélküliség terén még aránylag kevés eredményt ért el; egyik legnevezetesebb eredménye a természetes számok aritmetikájának ellentmondásnélkülisége, amit nem egészen négy éve bizonyított be — ACKERMANN, NEUMANN JÁNOS és HERBRAND részleteredményei után — GENTZEN. Nagyon fontos és meglepő eredményeket ért el azonban a bizonyításelmélet más idevágó kérdések terén, amennyiben felfedte az axiomatikus módszer egyes nem is sejtett hiányait; ezek az eredmények egyúttal feltárták a matematika további ágai ellentmondásnélküliségének bizonyítása elé tornyosuló nehézségek okát is.

1. Az axiomatikus módszer.

Annak exakt megfogalmazására, hogy mit értsünk aritmetikán, analízisen, geometrián stb., segítségére jött a bizonyításelméletnek e tudományágak axiomatikus felépítése. A geometria axiomatikus tárgyalását már a régi görögök megkezdték és meglepően magas fokig fejlesztették. Céljuk az volt vele, hogy a szemléletnek, ennek a geometriai kutatáshoz nélkülözhetetlen, de kétségtelenül szubjektív elemeket is tartalmazó eszköznek szerepét szabályozzák. E célból EUKLIDES, a görögök geometriájának nagy rendszerezője, néhány, véleménye szerint a szemlélet alapján mindenki által evidensnek tartott tételt tett rendszere kiindulópontjává; ezeket nevezte axiómáknak.[7] A geometria többi tételeit ezekből pusztán

---

Unendliche, *Math. Annalen*, **95** (1926), 161—190. oldal; Die Grundlagen der Mathematik, *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, **6** (1928), 65—85. oldal; Probleme der Grundlegung der Mathematik, *Math. Annalen*, **102** (1930), 1—9. oldal.

[7] Hogy EUKLIDES az axiómákat valóban mindenki által elfogadott tényeknek tekintette, mutatja a *κοιναὶ ἔννοιαι* (közös ideák) elnevezés is, amellyel egy részüket illeti. Más részüket *αἰτήματα* (követelmények, posztulátumok) névvel látja el; hogy e szétválasztásban milyen szempont vezette, nincs kellően tisztázva.

logikai úton, a szemléletre való újabb hivatkozás nélkül igyekezett bebizonyítani. Hogy ezt a tervet — mai szemmel nézve — nem vitte egészen következetesen keresztül, hanem egy-két helyen öntudatlanul is újból felhasznált a szemléletből vett tényeket, nem róható fel hibájául; ezt a hiányt későbbi axiómarendszerek teljesen pótolták.[8]

De a matematika többi ágaira vonatkozóan is rávezette a kutatókat hasonló eljárás szükségességére a következő meggondolás. Valamely fogalom definiálásánál, valamely tétel bebizonyításánál más fogalmakra, ill. tételekre hivatkozunk. E fogalmakat ismét újabb fogalmak segítségével definiálhatjuk s e tételeket újabb tételek segítségével bizonyíthatjuk be; azonban, ha sem a circulus vitiosus hibájába nem akarunk esni, sem a soha végre nem hajtható végtelen regresszusba nem akarunk belefogni, meg kell valahol állnunk a definiálásban is, a bizonyításban is; azaz bizonyos fogalmakat, ú. n. *alapfogalmakat,* már ismerteknek, bizonyos tételeket, ú. n. *axiómákat,* már elfogadottaknak kell tekintenünk. Az alapfogalmak segítségével a kérdéses diszciplina minden más fogalmát definiálhatjuk, az axiómák segítségével minden más tételét bebizonyíthatjuk; azonban az alapfogalmakról semmi mást nem használhatunk fel, mint amit az axiómák kimondanak róluk, azokat mintegy az axiómák segítségével implicite definiáljuk — már amennyire ezek egyáltalában meghatározzák őket.

Az alapfogalmak és az axiómák választása bizonyos fokig önkényes; mindenesetre célszerű, de nem logikai szükségszerűség, hogy lehetőleg egyszerűeknek, kézzelfoghatóknak válasszuk őket. Így pl. az *elemi geometriában* a pont, egyenes, sík fogalmát, az illeszkedés (rajtalevés, átmenés), a közöttfekvés és az egybevágóság relációját választhatjuk alapfogalmakul, axiómákul pedig

[8] A geometria első teljesen kielégítő axiómarendszerét HILBERT állította össze; l. *Grundlagen der Geometrie* c. művét (7. kiadás: Leipzig és Berlin, 1930). A magyarnyelvű irodalomban KERÉKJÁRTÓ BÉLA, *A geometria alapjairól,* I. kötet (Szeged, 1937) nyujtja az euklidesi elemi geometria axiomatikus felépítését; tárgyalása több szempontból egyszerűbb HILBERTénél.

olyanszerű tételeket, mint pl.[9], hogy bármely két különböző ponthoz van egy és csakis egy velük illeszkedő (rajtuk átmenő) egyenes; egy egyenessel illeszkedő (rajta levő) három pont közül mindig egy és csakis egy fekszik a másik kettő között; továbbá a háromszögek valamelyik egybevágósági tételét; a párhuzamosság jól ismert axiómáját; a folytonosság DEDEKIND-féle axiómáját, amely szerint, ha egy egyenes pontjait úgy osztjuk két halmazba, α-ba és β-ba, hogy mindegyikbe legalább két pont jusson és α két pontja között ne feküdjék β-nak pontja, akkor van oly pont, amely α-nak bármely tőle különböző pontja és β-nak bármely tőle különböző pontja között fekszik. De van olyan felépítése is a geometriának, amely a ponton kívül a mozgást és egy pontnak egy mozgás által egy másik pontba való átvivését választja alapfogalomnak, az egyenes, sík és egybevágóság fogalmait pedig ezek segítségével definiálja; e felépítésnél egyik axióma lehet pl. az, hogy három különböző ponthoz végtelen sok olyan mozgás van, amelyek az első kettőt önmagába viszik át, a harmadikat pedig csupa különböző pontokba.[10]

A természetes számok aritmetikájának első axiómarendszerét, GRASSMANN előmunkálatai után, PEANO adta meg.[11] Alapfogalmul a természetes szám s a 0 fogalmát és azt a műveletet választja, amely valamely a természetes számot a következő a' $(=a+1)$ számba visz át. Axiómái: 1. a 0 természetes szám; 2. ha a természetes szám, a' is az; 3. ha $a'=b'$, akkor $a=b$; 4. ha a természetes szám, akkor $a' \neq 0$; 5. ha a természetes számok valamely halmazának eleme 0 és valahányszor a eleme, mindannyiszor a' is, akkor e halmaznak minden természetes szám eleme (teljes indukció axiómája).

---

[9] A geometria — s később a halmazelmélet — meglehetősen terjedelmes axiómarendszeréből csak példaképpen sorolok fel néhány jellegzetes axiómát; néhol — egyszerűség kedvéért — meg is változtatom az axiómák eredeti szövegét.

[10] A *síkgeometria* ilyen felépítésére vonatkozólag l. HILBERTnek a 8. lábjegyzetben idézett művében «Anhang IV»-et.

[11] G. PEANO, Sul concetto di numero, *Rivista di matematica*, **1** (1891), 1—10. oldal.

A *halmazelméletet* — egyrészt a halmaz fogalmának az antinómiák elkerüléséhez szükséges exaktabbá tétele, másrészt bizonyos, az általa bebizonyított jólrendezési tétellel kapcsolatban felmerült kérdések tisztázása céljából — ZERMELO [12] építette fel axiomatikusan. Axiómarendszerét többek között FRAENKEL [13] és NEUMANN JÁNOS [14] fejlesztették tovább. A ZERMELO—FRAENKEL-féle axiómarendszer alapfogalmai a halmaz fogalma és az elemként tartalmazás relációja. E rendszerben az egyik axióma, a végtelenség axiómája, egy speciális végtelen halmaznak, $Z=\{0, \{0\}, \{\{0\}\}, \{\{\{0\}\}\},\ldots\}$-nek létezését kívánja meg (ahol 0 az üres halmaz, amelynek az a definíciója, hogy nincs eleme; $\{a\}$ azt a halmazt jelenti, amelynek a az egyetlen eleme; Z elemei $0,\{0\},\{\{0\}\},\{\{\{0\}\}\},\ldots$). A többi axióma — a meghatározottság axiómájától eltekintve, amely szerint, ha két halmaz elemei ugyanazok, akkor a halmazok is azonosak — azt mondja ki, hogy ha bizonyos halmazok léteznek, akkor belőlük bizonyos újabb halmazok is képezhetők; pl. bármely két halmazhoz, a-hoz és b-hez, van oly $\{a, b\}$ halmaz, amelynek a és b és csak ezek elemei (páraxióma); minden a halmazhoz és minden T tulajdonsághoz van olyan halmaz, amelynek elemei a-nak T tulajdonságú elemei és csak ezek (részhalmazaxióma); minden a halmazhoz van oly halmaz, amelynek elemei a részhalmazai (hatványhalmaz-axióma); nem akarom említés nélkül hagyni a nevezetes kiválasztási axiómát sem.

A *valós számok aritmetikájának* axiómarendszerét is többféleképpen választhatjuk. Egyik mód, s ez az aritmetikának felépítése szempontjából kényelmes, alapfogalmakul a valós szám, összeadás, szorzás fogalmát és a «kisebb» relációt választani, axiómákul pedig azokat a tételeket, amelyek a valós számok halmazát rendezett

---

[12] E. ZERMELO, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I, *Math. Annalen*, **65** (1908), 261—281. oldal.

[13] A. FRAENKEL, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, *Math. Zeitschrift*, **22** (1925), 250—273. oldal; *Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre* (Leipzig és Berlin, 1927).

[14] J. VON NEUMANN, Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, *Journal für die reine und angewandte Math.*, **154** (1925), 219—240. oldal; Die Axiomatisierung der Mengenlehre, *Math. Zeitschrift*, **27** (1928), 669—752. oldal.

testként jellemzik, s ezeken kívül a DEDEKIND-féle alaptulajdonságot. A bizonyításelmélet szempontjából jobban kezelhető axiómarendszert kapunk, ha a PEANO-féle axiómarendszert bővítjük ki a halmazelmélet olyan részével, amely lehetővé teszi, hogy a valós számokat DEDEKIND-féle szeletek segítségével vezessük be. Könnyű látni, hogy ehhez elegendő a páraxiómának (amelyet a racionális számok bevezetéséhez használunk) és a részhalmazaxiómának megfelelően specializált alakja; pl. az utóbbi így szól: bármely T tulajdonsághoz van oly halmaz, amely azokat és csakis azokat a *természetes számokból alkotott rendezett párokat*[15] tartalmazza, amelyek T tulajdonságúak. Az *analízis* szokásos felépítéséhez elegendő a függvényfogalmat mint alapfogalmat és egy bizonyos rá vonatkozó, a részhalmazaxiómához analóg axiómát hozzávennünk az előbbi axiómarendszerhez.[16]

Talán feltűnt az olvasónak, hogy ezekben az axiómákban az alapfogalmakon és néhány elkerülhetetlen, még tisztázandó, logikai fogalmon kívül a halmaz fogalma is szerepel. A halmaz-

[15] Ha a valós számokat nem racionális, hanem természetes számok halmazai segítségével vezetjük be (erre módot ad az a tény, hogy pl. minden 0 és 1 közötti irracionális számot egyértelműen meghatároz azon természetes számok halmaza, ahányadik helyen a kérdéses szám diadikus kifejtésében az 1 számjegy szerepel), akkor e helyett elegendő bármely T tulajdonsághoz a T tulajdonságú *természetes számok* halmazának létezését megkívánnunk.

[16] V. ö. J. VON NEUMANN, Zur Hilbertschen Beweistheorie, *Math. Zeitschrift*, 26 (1927), 1—46. oldal; l. különösen a 18. oldalon a «Funktionsaxiom»-ot. Hogy ez az axióma elegendő-e az analízis felépítéséhez, vagy az ottani 6. és 7. lábjegyzetben említett további függvényaxiómák közül az első is szükséges, az attól függ, hogy milyen terjedelemben akarjuk az analízist felépíteni. A folytonos függvények elméletéhez elegendő az eredeti függvényaxióma, a tetszőleges valós függvényekéhez kell a kérdéses további axióma is. Ha nem ragaszkodunk az analízis *szokásos* felépítéséhez, hanem a folytonos függvényeket természetes számok halmazaival vezetjük be (hogy ez lehetséges, legfeljebb a szokásosnál komplikáltabb tárgyalásra vezet, mutatja az a halmazelméleti tény, hogy a folytonos függvények kölcsönösen egyértelműen hozzárendelhetők a természetes számokból álló halmazokhoz), akkor a függvényaxióma helyett használhatjuk a megelőző lábjegyzetben említett speciális részhalmazaxiómát, ill. a további függvényaxióma helyett a halmazelmélet részhalmazaxiómájának megfelelő további speciális esetét is.

elmélet felépítésénél ez a fogalom alapfogalom. Ha a többi axiómarendszer esetében a halmaz fogalmát a halmazelméletből ismertnek tesszük fel, akkor tulajdonképpen csak relatív axiomatizálást végeztünk a halmazelméletre vonatkozóan; ez a gyakran alkalmazott eljárás csak félmunka és a bizonyításelmélet szempontjából értéktelen, mert ha így járnánk el, akkor nem foghatnánk hozzá pl. az aritmetika ellentmondásnélkülisége kérdéséhez addig, amíg a halmazelméleté nincs tisztázva. Egy másik eljárás az volna, hogy a halmaz (és a tartalmazás) fogalmának a kérdéses diszciplinában szükséges *speciális esetét* (pl. a geometria folytonossági axiómájánál a ponthalmaz fogalmát, a teljes indukció axiómája esetén a természetes számokból álló halmazét) hozzávesszük az alapfogalmakhoz, az axiómákhoz pedig a halmazelmélet axiómáinak megfelelő speciális esetét. Tulajdonképpen ezt az eljárást követtük a valós számok aritmetikájának axiomatizálásánál. Egy harmadik mód abban áll, hogy a halmaz fogalmát a tulajdonság logikai fogalmával helyettesítjük. Pl. a teljes indukció axiómáját úgy fogalmazhatjuk, hogy ha a 0 rendelkezik valamely T tulajdonsággal s ha, valahányszor megvan ez a T tulajdonsága valamely a természetes számnak, megvan a'-nek is, akkor minden természetes szám rendelkezik a T tulajdonsággal.[17] A tulajdonság fogalmának a matematikai logika nyujtotta tisztázása után (amelyre a részhalmaz-axióma, ill. ennek más axiómarendszerekben szükséges speciális esetei miatt is szükség van) ez a harmadik mód bizonyul legegyszerűbbnek a bizonyításelmélet szempontjából.

---

[17] Hasonló módon átfogalmazható a DEDEKIND-féle folytonossági axióma is úgy, hogy halmaz helyett tulajdonságról legyen benne szó. Azonban nem mindig sikerül ilyen módon kiküszöbölnünk az axiómákból a halmaz fogalmát. Például nem sikerül a halmaz fogalmát a tulajdonságéval pótolni a geometria folytonossági axiómájának HILBERT-féle alakjában (Vollständigkeitsaxiom), amely szerint a pontok, egyenesek és síkok halmaza nem bővíthető úgy és az illeszkedés, közöttfekvés és egybevágóság relációja nem terjeszthető ki a bővített halmazokra úgy, hogy az axiómarendszer összes többi axiómája érvényben maradjon. Hasonló megjegyzés érvényes ennek a teljességi axiómának specializált alakjára is (Axiom der linearen Vollständigkeit, a 8. lábjegyzetben idézett mű 30. oldalán).

Mármost valamely matematikai diszciplina axiomatikus felépítése pontos definícióját szolgáltatja annak, hogy mi tartozik a kérdéses diszciplinába; pl. a természetes számok aritmetikája azon tételek összessége, amelyek a PEANO-féle axiómáknak puszta logikai következményei (l. azonban még a 47. lábjegyzetet); s az aritmetika ellentmondásnélküliségét bebizonyítani annyit jelent, mint megmutatni, hogy ezeknek az axiómáknak nincs két olyan logikai következménye, amelyek egymás tagadásai. Hogy ennek bebizonyításához hozzáfoghassunk, még a «tétel», «következmény», «tagadás» fogalmát kell exakt módon megfogalmaznunk. Ezt az exakt megfogalmazást a matematikai logika teszi lehetővé.

A matematikai logikának itt elsősorban két ága jön tekintetbe: az elemi logika (vagy logikai aritmetika, ítéletkalkulus), és a logikai függvénykalkulus (logikai függvénytan, predikátumkalkulus) egy része, az ú. n. szűkebb függvénykalkulus.

2. Elemi logika.

A matematikai logika — ha eltekintünk egyes arab filozófusok folytatás nélkül maradt fogalomalkotásaitól — LEIBNIZre [18] vezethető vissza; csak azért nem mondhatjuk, hogy egyidős az infinitézimális számítással, mert azt ARCHIMEDESig szokás visszavezetni. LEIBNIZ célja az volt, hogy a tudomány számára a köznyelv pontatlanságaitól megtisztított nemzetközi nyelvet szerkesszen, amely e mellett szavak helyett olyan elemekből — a matematikaiakhoz hasonló formulákból — épül fel, amelyek a tudomány exakt mondanivalóihoz jobban símulnak, mint a szavak. LEIBNIZ kezdeményezését, eleinte a közben felmerült algebrai analógiáktól vezettetve, különösen BOOLE, PEIRCE és SCHRÖDER folytatták; majd FREGE, PEANO, RUSSELL, HILBERT és tanítványaik fejlesztették tovább a matematikai logikát, a matematika exakt megalapozásának szükségleteit tartva szem előtt.[19]

---

[18] G. W. LEIBNIZ, Dissertatio de arte combinatoria etc., *Opera philosophica quae exstant omnia*, edidit J. E. ERDMANN, **1** (Berlin, 1840), 6—44. oldal; Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis, *ugyanott*, 94—97. oldal.

[19] A matematikai logikát a bizonyításelmélethez szükséges formájá-

A matematika egyes körébe vágó ítéleteket igazaknak, másokat hamisaknak deklarál; más szóval, egyes ítéletekhez az «igaz», másokhoz a «hamis» *logikai értékeket* rendeli hozzá. A matematikai logika e két logikai értékkel, természetük mélyebb kutatását a filozófusoknak engedve át, hasonló módon számol, mint az aritmetika a számokkal. Algebrai analógiák miatt e két értéket sokáig az «1» és «0» jelekkel jelölték; ha a matematikai logikát a matematikára akarjuk alkalmazni, célszerű a logikai értékek számára a matematika jeleitől különböző jeleket bevezetni, pl. «$\uparrow$»-t az «igaz», «$\downarrow$»-t a «hamis» számára.

Az elemi logika oly műveletekkel (függvényekkel) foglalkozik, amelyeknek független változói[20] is, értékei is az $\uparrow$ és $\downarrow$ értékeken futnak át. Ilyen műveletet úgy adhatunk meg, hogy valamennyi — véges számú — helyen megadjuk értékét; pl. az

$$\begin{array}{cc|c|c} & & \multicolumn{2}{c}{Y} \\ & & \uparrow & \downarrow \\ \hline X & \uparrow & \uparrow & \downarrow \\ \hline & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

táblázat az ú. n. *konjunkció* műveletét definiálja, amelynek értéke, $X \mathbin{\&} Y$ («X és Y»), tehát akkor és csak akkor $\uparrow$, ha $X = Y = \uparrow$. Hasonlóan definiálhatjuk «egyszeregyükkel» a többi műveleteket; így

$$\begin{array}{cc|c|c} & & \multicolumn{2}{c}{Y} \\ & & \uparrow & \downarrow \\ \hline X & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \hline & \downarrow & \uparrow & \downarrow \end{array}$$

ban tárgyalja D. HILBERT—W. ACKERMANN, *Grundzüge der theoretischen Logik* (2. kiadás: Berlin, 1938), valamint, bizonyításelméleti alkalmazásaival együtt, D. HILBERT—P. BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik*, I (Berlin, 1934). Mindkét mű ajánlható a matematikai logika elsajátítására. A matematikai logikának 1935-ig bezárólag teljes irodalmát adja ALONZO CHURCH, A Bibliography of Symbolic Logic, *The Journal of Symbolic Logic*, **1** (1936), 121—218. oldal és Additions and Corrections to A Bibliography of Symbolic Logic, *ugyanott*, **3** (1938), 178—212 oldal.

[20] Az $\uparrow$ és $\downarrow$ értékeken átfutó, ú. n. (elemi) logikai változókat latin nagy betűkkel fogom jelölni.

a *diszjunkció*, $X \vee Y$ («X vagy Y»),

		Y	
		↑	↓
X	↑	↑	↓
	↓	↑	↑

pedig az *implikáció*, $X \rightarrow Y$ («X-ből Y») definiciója. Lehet többváltozós műveletről is beszélni; pl. egy háromváltozós művelet definíciójához nyolc helyen kell megadni az értékét. Viszont az

X	↑	↓
$\overline{X}$	↓	↑

táblázat egyváltozós műveletet definiál, a *negáció* $\overline{X}$ («nem X») műveletét. Az elnevezések azokra a szócskákra utalnak, amelyeknek szerepét ezek a műveletek a matematikára való alkalmazásban (és egyéb alkalmazásokban is) átveszik. Pl. ha két ítéletet az «és» szócskával kötünk össze, a kapott ítélet logikai értéke X & Y lesz, ahol X és Y rendre az eredeti ítéletek logikai értéke; hasonlóan, $\overline{X}$ annak az ítéletnek logikai értéke, amely valamely X logikai értékű ítéletből a «nem» szócska alkalmazásával keletkezik. A «vagy» szócskát a köznyelvben többféle értelemben szokás használni; a diszjunkció definíciója ezt a többértelműséget a matematikában használatos értelemnek (amely szerint pl. «2 kisebb vagy egyenlő 3-mal» igaz ítéletnek számít) előnyben részesítésével szünteti meg. Az implikáció esetében e mellett még egy egyszerűsítő kiterjesztést is végzünk azáltal, hogy azt, hogy egy ítéletből egy másik következik, igaznak deklaráljuk minden esetben, amikor vagy az első hamis, vagy a második igaz, akár van «tartalmi összefüggés» a két ítélet között, akár nincs; ugyanis a bizonyításelmélet számára a következés fogalmából csak az az egy tény lesz fontos, hogy az, hogy egy igaz ítéletből következik egy hamis, sohasem lehet igaz.[21]

[21] Más célokra szokás e mellett az ú. n. *materiális implikáció* mellett egy, a következmény klasszikus logikai (és köznapi) fogalmának jobban megfelelő ú. n. *szoros implikációt* (strict implication) is figyelembe venni; ez azonban már nem a fenti értelemben vett elemi logikai művelet, hiszen logikai értéke nem pusztán elő- és utótagjának logikai értékétől függ. E szoros implikáció bevezetése axiomatikusan történhetik; l. C. I. Lewis—C. H. Langford, *Symbolic Logic* (New York, 1932), Appendix II.

Amint egy műveletet azáltal definiálhatunk az elemi logikában, hogy értékét minden helyen megadjuk, ugyanúgy egy műveleti szabályt azáltal bizonyíthatunk be, hogy érvényességét minden egyes (véges számú) helyen igazoljuk. Ily módon könnyen verifikálhatjuk pl. a következő törvényeket:

$$X \& Y = Y \& X, \quad X \vee Y = Y \vee X \quad \text{(kommutativ törvények)};$$

$$(X \& Y) \& Z = X \& (Y \& Z), \quad (X \vee Y) \vee Z = X \vee (Y \vee Z)$$
$$\text{(asszociativ törvények)};$$

$$(X \& Y) \vee Z = (X \vee Z) \& (Y \vee Z), \quad (X \vee Y) \& Z = (X \& Z) \vee (Y \& Z)$$
$$\text{(disztributiv törvények)},$$

amelyeken a már említett algebrai analógia alapul (lényeges eltérés azonban az algebrától, hogy itt mindkét disztributív törvény érvényes).

A felsorolt műveletek segítségével, a (többváltozós) interpolációs formula analogonjaként könnyen felírhatjuk az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ változók olyan kifejezését, amely adott helyeken adott logikai értékeket vesz fel; minthogy az összes lehetséges helyek száma véges (2^n) és egy műveletet az ezeken a helyeken felvett értékei meghatározzák, adódik, hogy a felsorolt négy művelet segítségével bármely, akárhány változós logikai műveletet kifejezhetünk. A könnyen verifikálható

$$X \& Y = \overline{\overline{X} \vee \overline{Y}} = \overline{X \to \overline{Y}}, \quad X \vee Y = \overline{\overline{X} \& \overline{Y}} = (X \to Y) \to Y,$$
$$X \to Y = \overline{X \& \overline{Y}} = \overline{X} \vee Y$$

törvények mutatják, hogy e célra már a negáció és az $X \& Y$, $X \vee Y$, $X \to Y$, műveletek *egyike* is megfelel.[22]

Megemlítem még az

$$(X \& Y) \to Z = X \to (Y \to Z) \tag{1}$$

törvényt, amely mutatja, hogyan lehet olyan implikációt, amelynek előtagja konjunkció, pusztán implikációkkal kifejezni.

[22] Kifejezhetjük a logikai műveleteket egyetlenegy kétváltozós művelet segítségével is: akár az $X|Y = \overline{X \& Y}$, akár az $X||Y = \overline{X \vee Y}$ művelet segítségével; l. H. M. Sheffer, A Set of Five Independent Postulates for Boolean Algebras, with Application to Logical Constants, *Transactions of the American Math. Society*, **14** (1913), 481—488. oldal.

A felsorolt műveletek segítségével változókból felépített kifejezések, ú. n. *elemi logikai formulák* között fontos szerepet játszanak a bizonyításelméletben azok, amelyeknek értéke a változók minden értékrendszerénél $\uparrow$. Az ilyen formulákat identikusan igaz formuláknak, röviden *identitásoknak* nevezzük. Ilyenek pl.

$$X \to X\,;\ X \vee \overline{X}\,;\ \overline{X \,\&\, \overline{X}}\,;$$

$$X \to (Y \to X);\ (\overline{X} \to \overline{Y}) \to (Y \to X);\ (X \to (Y \to Z)) \to ((X \to Y) \to (X \to Z));\ (2)$$

további ilyen identitásokat kapunk, ha a fentemlített törvények bal- és jobboldalát (vagy megfordítva) az implikáció jelével kötjük össze. Identitásból újabb identitást kapunk, ha változói helyébe tetszőleges formulákat helyettesítünk (természetesen ugyanazon változó helyébe, ha több helyen is előfordul, mindenütt ugyanazt a formulát). Az implikáció definíciójából közvetlenül adódik továbbá, hogy ha $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ identitások,[23] akkor $\mathfrak{B}$ is az; azt az operációt, amely $\mathfrak{A}$-ból és $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$-ből $\mathfrak{B}$-t adja, leválasztásnak nevezzük. Érdekes eredmény, hogy meg lehet adni véges számú olyan identitást, amelyből minden identitást meg lehet kapni helyettesítések és leválasztások segítségével;[24] ezt a tényt — nyilvánvaló analógia folytán — az elemi logika axiomatizálhatóságának, a kérdéses véges számú identitást (amelyeket többféleképpen választhatunk) az elemi logika axiómáinak, a helyettesítést és leválasztást az elemi logika következtetési szabályainak nevezzük. Ha csak az implikáció és negáció segítségével felépülő identitásokra szorítkozunk, a (2) formulák egy axiómarendszert adnak ezek számára.

Adott formuláról mindig el tudjuk dönteni, identitás-e, vagy nem; elég ehhez valamennyi (véges számú) helyen kiszámítani az értékét. Ha a változók száma nagy, akkor ez az eljárás hosszadalmas; vannak gyorsabban célhoz vezető módszerek is.

[23] Német nagybetűk nem logikai változókat jelölnek, hanem tetszőleges formulákat.

[24] E. L. Post, Introduction to a General Theory of Elementary Propositions, *American Journal of Math.*, **43** (1921), 163—185. oldal; egyszerűbb bizonyítás tekintetében l. L. Kalmár, Über die Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls, *Acta Scientiarum Math.*, **7** (1934—35), 222—243. oldal

3. Logikai függvénykalkulus.

A matematikában lépten-nyomon előfordulnak olyan ítéletek, amelyek egy vagy több betűt (változót) tartalmaznak s logikai értékük e változóktól függ; pl. «x osztója y-nak», «P a Q és R között fekszik» stb. Maguk a változók a legkülönbözőbb halmazokon futnak át, pl. a természetes számok halmazán, a sík pontjainak halmazán stb. Az ilyen ítéletek logikai értéke tehát olyan függvény, amelynek változói egy adott H halmazon futnak át, értékei pedig logikai értékek. Az ilyen ú. n. *logikai függvényekkel* foglalkozik a logikai függvénykalkulus. A szűkebb függvénykalkulusban a H halmazt fixnek tekintjük és *individuum-tartománynak*, elemeit pedig *individuumoknak*[25] nevezzük. Az egyváltozós logikai függvényeket *tulajdonságoknak*, predikátumoknak, a többváltozós logikai függvényeket *relációknak* is szokás nevezni; az elnevezés okát eléggé megvilágítják a következő példák, amelyekben H a pozitív egész számok halmaza:

$$F(x)=\begin{cases}\uparrow, & \text{ha } x \text{ páros szám,}\\ \downarrow, & \text{ha } x \text{ páratlan szám;}\end{cases}$$

$$G(x)=\begin{cases}\uparrow, & \text{ha } x \text{ primszám,}\\ \downarrow, & \text{ha } x \text{ összetett szám;}\end{cases}$$

$$K(x, y)=\begin{cases}\uparrow, & \text{ha } x<y,\\ \downarrow, & \text{ha } x\geqq y;\end{cases}$$

$$D(x, y)=\begin{cases}\uparrow, & \text{ha } x \text{ osztója } y\text{-nak,}\\ \downarrow, & \text{ha } x \text{ nem osztója } y\text{-nak;}\end{cases}$$

$$S(x, y, z)=\begin{cases}\uparrow, & \text{ha } z=x+y,\\ \downarrow, & \text{ha } z\neq x+y;\end{cases}$$

$$P(x, y, z)=\begin{cases}\uparrow, & \text{ha } z=xy,\\ \downarrow, & \text{ha } z\neq xy.\end{cases}$$

Más példák: legyen H a sík pontjainak halmaza, $L(x, y, z)$ akkor és csak akkor $\uparrow$, ha x, y, z egy egyenesen vannak; $M(x, y, z)$ akkor és csak akkor $\uparrow$, ha y az x és z közé esik.

Logikai függvényekre az elemi logika műveleteit alkalmazva,

---

[25] Az individuumokon átfutó változókat latin kisbetűkkel fogjuk jelölni.

újabb logikai függvényeket kapunk; pl. $F(x)$ & $G(x)$, ahol F és G a fent definiált függvények, akkor és csakis akkor $\uparrow$, ha $x=2$; $K(x, y) \vee K(y, x)$ akkor és csak akkor $\uparrow$, ha $x \neq y$.

A függvénykalkulus azonban foglalkozik két speciális, logikai függvényekre vonatkozó függvényoperációval, ú. n. quantorral is; ezek definíciója:

$$(x)F(x) = \begin{cases} \uparrow, \text{ ha } F(x) \text{ az a függvény, amelynek értéke minden helyen } \uparrow, \\ \downarrow \text{ különben;} \end{cases}$$

és

$$(\mathsf{E}x)F(x) = \begin{cases} \downarrow, \text{ ha } F(x) \text{ az a függvény, amelynek értéke minden helyen } \downarrow, \\ \uparrow \text{ különben.} \end{cases}$$

A (x)-et általános, $(\mathsf{E}x)$-et exisztenciális quantornak nevezzük; kiejtésük: «minden x-re», ill. «van oly x, hogy». E quantorok többváltozós függvényre alkalmazva eggyel kevesebb változós függvényt adnak; pl. $(\mathsf{E}x)P(x, y, z)$ akkor és csak akkor $\downarrow$, ha y és z olyan természetes számok, hogy minden x helyen $z \neq xy$, azaz ha y nem osztója z-nek; tehát

$$(\mathsf{E}x)P(x, y, z) = D(y, z);$$

hasonlóan (figyelembevéve, hogy H a *pozitív* egész számok halmaza)

$$(\mathsf{E}x)S(x, y, z) = K(y, z);$$

$(\mathsf{E}x)P(x, x, y)$ akkor és csak akkor $\uparrow$, ha y négyzetszám; $(x)P(x, y, x)$ akkor és csak akkor $\uparrow$, ha $y=1$. A (x), $(\mathsf{E}x)$ quantorok alkalmazásával keletkező kifejezések tehát x-től nem függnek; x bennük ú. n. kötött változó (éppúgy, mint az analízis $\int_a^b f(x)\,dx$ kifejezésében).

A függvénykalkulus *formulái* azok a kifejezések, amelyek elemi logikai változókból és logikai függvényekből az elemi logika műveletei és quantorok segítségével épülnek fel; pl.

$$(x)((\mathsf{E}y)F(x, y) \rightarrow (z)G(y, z, u) \vee X).$$

Egy ilyen formula értéke függ *a)* az individuumtartomány választásától; *b)* a benne szereplő logikai függvények és az elemi logikai változók helyére teendő logikai értékek választásától; *c)* a quantorral le nem kötött, ú. n. szabad változók[26] helyére teendő individuumok választásától. Megint azok a formulák lesznek fontosak számunkra, amelyeknek értéke ezek minden választásánál $\uparrow$; ezeket nevezzük a függvénykalkulus identitásainak. Ilyenek maguk az elemi logika identitásai is; ezeken kívül pl.

$$(x)F(x) \rightarrow F(a), \tag{3}$$

$$F(a) \rightarrow (\mathsf{E}x)F(x); \tag{4}$$

a quantorok definíciója ugyanis azonnal adja, hogy ezek értéke az individuumtartomány, az F egyváltozós logikai függvény és az a individuum minden választásánál $\uparrow$. További példák

$$(\mathsf{E}x)(y)F(x,y) \rightarrow (y)(\mathsf{E}x)F(x,y);$$

$$(x)F(x)\&(x)G(x) \rightarrow (x)(F(x)\&G(x));$$

ellenben pl.

$$(y)(\mathsf{E}x)F(x,y) \rightarrow (\mathsf{E}x)(y)F(x,y)$$

nem identitás, mert értéke $\downarrow$ lesz, ha pl. az individuumtartomány a természetes számok halmaza, továbbá $F(x,y)$ a fenti $K(y,x)$.

Itt már nem ismeretes olyan eljárás, amelynek segítségével adott formuláról mindig eldönthetjük véges számú lépésben, vajjon identitás-e; az ily eljárás meghatározására vonatkozó probléma az ú. n. eldöntés-probléma. Ez a probléma, noha számos speciális esete megoldásra talált (pl. olyan formulák esetére, amelyekben minden quantor a formula elején van és hatásköre a formula végéig terjed[27] s a quantorok közül csak kettő exisztenciális s

---

[26] Jegyezzük meg, hogy ugyanaz a változó lehet egy formula egyik helyén szabad, másik helyén kötött változó; pl. az utoljára említett formulában y a $\rightarrow$ előtt kötött, utána szabad változó. A formula áttekinthetősége szempontjából célszerű bizonyos betűket (pl. x, y, z, u, v, w) csak kötött, másokat (pl. a, b, c, d, e) csak szabad változók jelölésére használni; ezt a 19. lábjegyzetben idézett HILBERT—BERNAYS-féle könyv szigorúan keresztülviszi.

[27] Az olyan formulákat, amelyekben minden quantor elől van és az egész utána következő formularészre vonatkozik, praenex formuláknak nevezik. Minden formulához található olyan praenex formula, amelynek mindig ugyanaz az értéke, mint az eredetinek, úgyhogy az eldöntésprobléma szempontjából a praenexség nem lényeges megszorítás.

azok is szomszédosak[28]), általánosságban, mint CHURCH nemrég bebizonyította,[29] megoldhatatlan.

A bizonyításelmélet szempontjából célszerű a formula és az identitás fogalmának még két általánosítását figyelembevennünk. Minden individuumtartományban definiálható a következő logikai függvény:

$$\Delta(x, y) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } x \text{ ugyanaz az individuum, mint } y, \\ \downarrow & \text{különben.} \end{cases}$$

Mármost egy formulát, amelyben ez a speciális függvény is előfordul, akkor nevezünk identitásnak, ha az individuumtartomány, a formulában Δ-n kívül szereplő logikai függvények és az elemi logikai változók helyére teendő logikai értékek, végül a szabad változók helyébe teendő individuumok bármely választásánál, ha azonkívül Δ épp a fent definiált logikai függvényt jelenti, $\uparrow$ a formula értéke. Pl.

$$\Delta(a, a), \tag{5}$$

$$\Delta(a, b) \rightarrow (F(a) \rightarrow F(b)) \tag{6}$$

$$(\mathsf{E}x)(y)\, \Delta(x, y)\, \&\, (\mathsf{E}x)F(x) \rightarrow (x)F(x)$$

---

[28] Az eldöntés-probléma e speciális esetének megoldására vonatkozólag l. K. GÖDEL, Ein Spezialfall des Entscheidungsproblems der theoretischen Logik, *Ergebnisse eines math. Kolloquiums*, **2** (1932), 27—28. oldal; L. KALMÁR, Über die Erfüllbarkeit derjenigen Zählausdrücke, welche in der Normalform zwei benachbarte Allzeichen enthalten, *Math. Annalen*, **108** (1933), 466—484. oldal; K. SCHÜTTE, Untersuchungen zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Math. Annalen*, **109** (1933—34), 572—603. oldal.

[29] A. CHURCH, A Note on the Entscheidungsproblem, *Journal of Symbolic Logic*, **1** (1936), 40—41. és 101—102. oldal. — Az eldöntésprobléma általános megoldása olyan eljárás megadásában állna, amely minden formulához hozzárendel egy, véges számú lépésben meghatározható, logikai értéket, mégpedig az $\uparrow$ -at, ha a formula identitás, a $\downarrow$ -at, ha nem. CHURCH azt, hogy ilyen hozzárendelés nem lehetséges, nem úgy mutatja meg, hogy olyan formulát ad meg, amelyről nem lehet véges számú lépésben eldönteni, hogy identitás-e, vagy nem, hanem úgy, hogy minden olyan *véges számú lépésben végrehajtható* eljáráshoz, amely minden formulához egy-egy logikai értéket rendel hozzá, megad egy-egy formulát, amelyről el tudja dönteni, hogy identitás-e, vagy nem; de megmutatja, hogy ha identitás, akkor éppen a $\downarrow$, ha meg nem identitás, akkor az $\uparrow$ értéket rendelte hozzá a szóbanforgó eljárás.

ilyen identitások (a legutóbbi azért, mert az implikáció $\uparrow$, ha előtagja $\downarrow$, bármi is legyen utótagja; ha pedig előtagja $\uparrow$, azaz az előtagban szereplő konjunkció mindkét tagja $\uparrow$, akkor az individuumtartomány egyrészt egyetlenegy elemből áll, másrészt $F(x)$, ha x ezt az elemet jelenti, nem $\downarrow$, tehát az individuumtartomány bármely (egyetlen) helyén $\uparrow$, úgyhogy az implikáció utótagja s vele az egész implikáció $\uparrow$.

Tovább általánosíthatjuk még a formula fogalmát úgy is, hogy megengedjük, hogy ú. n. *matematikai függvények*, azaz olyan függvények is szerepeljenek benne, amelyeknek változói individuumokon futnak át és értékei is individuumok.[30] Ilyen matematikai függvény pl. a természetes számok individuumtartományán az $x+y$, vagy az $x.y$ függvény, vagy a sík pontjainak halmazán az az $f(x, y)$ függvény, amelynek értéke az x és y pontok felezőpontja. A formulákban a logikai függvények argumentumaiban individuumváltozókból és matematikai függvényekből összetett tetszőleges *kifejezések* állhatnak; pl.

$$(x)(\mathsf{E}y)(F(x,f(x,g(x,y)))\vee G(f(x,y),g(f(x,y),f(y,x)))\rightarrow \Delta\,(f(x,y),g(y,y)))$$

ilyen általános értelemben vett formula. Egy ilyen formulát akkor nevezünk identitásnak, ha az individuumtartomány, a benne szereplő logikai és matematikai függvények, az elemi logikai változók helyébe teendő logikai értékek és a szabad változók helyébe teendő individuumok bármely választásánál (azonban, ha a Δ függvény is szerepel benne, ennek fent megadott definíciójánál) $\uparrow$ az értéke. Pl.

$$(x)F(x,f(x))\rightarrow (x)(\mathsf{E}y)F(x,y)$$

identitás. Az ilyen általánosított identitásokra vonatkozó eldöntés-probléma visszavezethető az eredeti eldöntés-problémára, de vele együtt megoldhatatlan.

Az ú. n. bővített függvénykalkulus az individuumtartományok egy egész seregén definiált logikai függvényekkel, a reájuk vonatkozó quantorokkal és az ezekből felépíthető formulákkal foglal-

[30] Az ilyen függvényeket latin kisbetűkkel, míg a logikai függvényeket latin nagybetűkkel jelöljük.

kozik; ezek közül az individuumtartományok közül az első, H_1, tetszőleges, de fix; a következő, H_2, a H_1-en definiált logikai függvények halmaza; H_3 a H_2-n definiált logikai függvények halmaza stb.[31] Ezzel nem foglalkozunk itt részletesebben.

Mármost a matematikai logika segítségével pontosabban megfogalmazhatjuk az axiomatizálásban szereplő fogalmak jelentését. Minden axiomatizálással egy összességet szándékozunk jellemezni, pl. a Peano-féle axiómákkal a természetes számok halmazát, a geometria axiomatizálásával a tér pontjainak, egyeneseinek és síkjainak halmazát.[32] Az alapfogalmak e halmazon mint individuumtartományon definiált logikai vagy matematikai függvények. Az előbbiekre példák a geometria axiómarendszerében a «pont», «egyenes», «sík» predikátumai (ezek közül pl. az első az az egyváltozós logikai függvény, amely akkor és csakis akkor ↑, ha argumentuma pont), az «illeszkedés», a «közöttfekvés» és az «egybevágóság» relációja (pl. a harmadik az a négyváltozós $F(x, y, z, u)$ logikai függvény, amely akkor és csak akkor ↑, ha x, y, z és u pontok s az xy szakasz egybevágó a zu szakasszal); a Peano-féle axiómákban a «természetes szám» predikátuma; a halmazelmélet axiómáiban a «halmaz» predikátuma és az «elemként tartalmazás» relációja. Az utóbbiakra példa a Peano-féle axiómákban az a' függvény. Alapfogalomként speciális individuum is szerepelhet, mint pl. itt a 0; az ilyeneket beleérthetjük a matematikai függvények közé, mint 0-változós függvényeket.

Maguk az axiómák s általánosan az axiomatizált diszciplina tételei az alapfogalmakból elemi logikai műveletek és quantorok segítségével összetehető bizonyos formulák ↑ értékűségét fejezik ki. Az axiómák és tételek ily módon való felírásának, az ú. n. formali-

---

[31] A bővített függvénykalkulusnak a matematika Russelltől származó ú. n. *logicisztikus* felépítésénél jut fontos szerep. E felépítés a matematika minden egyes tételét mint a bővített logikai függvénykalkulus identitását kapja meg.

[32] A halmazelmélet axiómarendszere is egy összességet: a halmazok (és, az eredeti Zermelo-féle axiómarendszer esetén, a nem halmazjellegű elemek) összességét jellemzi. Ezen a tényen semmit sem változtat az, hogy maga ez az összesség az axiomatikus halmazelméletben nem halmaz·

zálásnak[33] módját illusztrálják a következő példák. Ha $N(x)$ a «természetes szám» predikátuma ($\uparrow$, ha x természetes szám, különben[34] $\downarrow$), továbbá $\Delta(a, b)$ helyett, mint szokásos, $a=b$-t és $\overline{\Delta(a, b)}$ helyett $a \neq b$-t írunk, akkor az első négy PEANO-féle axióma azt fejezi ki, hogy a következő formulák értéke mindig $\uparrow$:

$$N(0),$$
$$N(a) \rightarrow N(a');$$
$$a'=b' \rightarrow a=b;$$
$$N(a) \rightarrow a' \neq 0.$$

Ha $P(x)$ a «pont», $L(x)$ az «egyenes» predikátuma, $C(x,y)$ az «illeszkedés» relációja, akkor az az axióma, hogy két ponton egy és csak egy egyenes megy át, úgy fejezhető ki, hogy a következő formula értéke bármely a és b mellett $\uparrow$:

$$P(a) \,\&\, P(b) \,\&\, a \neq b \rightarrow (\mathsf{E}x)(L(x) \,\&\, C(a,x) \,\&\, C(b,x) \,\&$$
$$\&\, (y)(L(y) \,\&\, C(a,y) \,\&\, C(b,y) \rightarrow y=x))$$

az ($\mathsf{E}x$) után következő konjunkció első három tagjának $\uparrow$ értékűsége azt fejezi ki, hogy x az a-val is, b-vel is illeszkedő egyenes; a negyedik tagé pedig azt, hogy ha valamely y is ilyen egyenes, akkor azonos x-szel, azaz, hogy csak egy ilyen egyenes van).

A tetszőleges tulajdonságokról szóló axiómáknak olyan formulák felelnek meg, amelyekben *tetszőleges* (egyváltozós) logikai függ-

---

[33] A formalizálás a bizonyításelmélet szempontjából csak segédeszköz az ellentmondásnélküliség exakt megfogalmazásához és bebizonyításához. Más felfogás, különösen a logicizmus felfogása szerint a formalizálás öncél: a logicisták szerint a matematika csak a formalizálással éri el az exaktság teljes fokát. Ez a felfogás PEANOra vezethető vissza; l. G. PEANO, *Arithmetices principia, nova methodo exposita* (Torino, 1889); *I principii di geometria, logicamente esposti* (Torino, 1889); *Formulaire de mathématiques* (Torino, 1895—1908).

[34] Ha az axiómarendszerrel jellemzett individuumtartomány a természetes számok összessége, akkor $N(x)$ mindig igaz; ekkor az első két PEANO-féle axiómára nincs is szükség és a negyedik is az egyszerűbb $a' \neq 0$ formulával formalizálható. Más a helyzet, ha pl. a valós számok összességét akarjuk axiomatikusan jellemezni, s a PEANO-féle axiómák axiómarendszerünknek csak egy részét képezik; ez esetben vannak individuumtartományunknak más elemei is, mint természetes számok s az $N(x)$ predikátumra valóban szükség van.

vény (ú. n. függvényváltozó) van; pl. a teljes indukció axiómája úgy fejezhető ki, hogy az

$$F(0)\ \&\ (x)(F(x) \rightarrow F(x')) \rightarrow (x)(N(x) \rightarrow F(x))$$

formula értéke, a folytonosság DEDEKIND-féle axiómája pedig azt, hogy ha M a «közöttfekvés» relációja, az

$$(\mathsf{E}x)(\mathsf{E}y)(\mathsf{E}z)(\mathsf{E}u)(x \neq y\ \&\ z \neq u\ \&\ F(x)\ \&\ F(y)\ \&\ \overline{F(z)}\ \&\ \overline{F(u)})\ \&$$
$$\&\ (x)(y)(z)(F(x)\ \&\ F(y)\ \&\ M(x,z,y) \rightarrow F(z)) \rightarrow (\mathsf{E}u)(x)(y)\,(F(x)\ \&$$
$$\&\ \overline{F(y)}\ \&\ x \neq u\ \&\ y \neq u \rightarrow M(x,u,y))$$

formula értéke az F függvényváltozó bármely választásánál $\uparrow$.

Az axiómák erős megszorítást jelentenek az individuumtartományra és az alapfogalmakra nézve. Hiszen egy axiómarendszer éppen azt jelenti, hogy nem tetszőleges individuumtartományról van szó, s az alapfogalmakat reprezentáló logikai és matematikai függvények nem tetszőlegesek, hanem olyanok, hogy minden egyes axióma [35] értéke (a szabad változók és a függvényváltozók bármely választásánál) $\uparrow$ legyen.

Mármost legyenek $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ egy axiómarendszer axiómáit, $\mathfrak{B}$ pedig az axiomatizált diszciplina egy tételét ilyen módon formalizáló formulák. Mit jelent az, hogy a kérdéses tétel pusztán logikai úton (a nélkül, hogy másra, mint az axiómákra hivatkoznánk, a nélkül, hogy az alapfogalmakról mást felhasználnánk, mint amit az axiómák kifejeznek) következik az axiómákból? Azt, hogy minden olyan individuumtartományban és az alapfogalmaknak megfelelő logikai és matematikai függvények minden olyan választásánál, amelyeknél $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \ldots = \mathfrak{A}_n = \uparrow$, egyúttal $\mathfrak{B} = \uparrow$. Nevezzük az individuumtartomány és az alapfogalmaknak megfelelő logikai és matematikai függvények választását röviden *modell*nek és egyelőre tegyük fel, hogy sem $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$, sem $\mathfrak{B}$

[35] Egyszerűbb kifejezésmód kedvéért néha az axiómákat formalizáló formulákat azonosítjuk az axiómákkal; hasonlóan, az axiomatizált diszciplina tételeit formalizáló formulák és maguk e tételek között sem teszünk különbséget.

nem tartalmaznak szabad változókat,[36] sem pedig függvényváltozókat, úgyhogy $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{B}$ határozott értékeket vesznek fel, mihelyt a modellt megadjuk. Akkor a fenti tulajdonság úgy is kifejezhető, hogy az

$$\mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_n \rightarrow \mathfrak{B} \tag{7}$$

formula értéke bármely modellben $\uparrow$, más szóval: (7) identitás. Hiszen (7) értéke biztosan $\uparrow$, ha $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ közül csak egy is $\downarrow$, mert akkor az implikáció előtagja $\downarrow$; tehát (7) akkor és csak akkor identitás, ha értéke mindig $\uparrow$ akkor is, ha $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \ldots = \mathfrak{A}_n = \uparrow$, azaz ekkor $\mathfrak{B} = \uparrow$.

Pl. a $0' \neq 0'''$ (közönséges jelöléssel: $1 \neq 3$) tétel pusztán logikai úton következik az első négy PEANO-féle axiómából. Ez azt jelenti, hogy ha H bármilyen halmaz, $N(x)$ bármilyen H-n értelmezett egyváltozós logikai és x' bármilyen H-n értelmezett egyváltozós matematikai függvény, továbbá 0 a H halmaz bármely elemét jelöli, ha továbbá $N(0) = \uparrow$, $N(a) \rightarrow N(a') = \uparrow$, $\Delta(a', b') \rightarrow \Delta(a, b) = \uparrow$ és $N(a) \rightarrow \overline{\Delta(a', 0)} = \uparrow$ a H halmaz bármely a, b elemére, akkor $\overline{\Delta(0', 0''')} = \uparrow$. Ezt a tényt másképp úgy is kifejezhetjük, hogy az

$$\begin{aligned} & N(c) \,\&\, (x)(N(x) \rightarrow N(x')) \,\&\, (x)(y)(\Delta(x', y') \rightarrow \Delta(x, y)) \,\&\, \\ & \quad \&\, (x)(N(x) \rightarrow \overline{\Delta(x', c)}) \rightarrow \overline{\Delta(c', c''')} \end{aligned} \tag{8}$$

formula értéke a H halmaz, ennek c eleme s az $N(x)$ logikai és x' matematikai függvény bármely választásánál $\uparrow$, azaz a (8) formula identitás. Itt ismét $\Delta(x, y)$-t írtunk $x = y$ helyett (mert az $=$ jelet a logikai értékek egyenlőségének jelölésére használtuk); továbbá 0 helyett c-t írtunk annak kitüntetésére, hogy H bármely elemét jelölheti; a PEANO-féle axiómákat pedig az a, b szabad változók helyett az x, y kötött változókkal formalizáltuk (l. a 36. lábjegyzetet).

---

[36] Szabad változó jelenlétén könnyen segíthetünk úgy, hogy helyébe általános quantorral kötött változót teszünk; pl. a második PEANO-féle axiómát $(x)(N(x) \rightarrow N(x'))$ alakban írhatjuk. Függvényváltozók jelenlétén hasonló módon csak akkor segíthetnénk, ha a bővített függvénykalkulust vennők alapul; ez esetben pl. a teljes indukció axiómáját $(F)(F(0) \,\&\, (x)(F(x) \rightarrow F(x')) \rightarrow (x)(N(x) \rightarrow F(x)))$ alakban írhatnók.

A (7) formula az (1) törvény (és a konjunkció asszociatív törvénye) ismételt alkalmazásával így is írható:

$$\mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \ldots \to (\mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B}) \ldots) ; \tag{9}$$

a $\mathfrak{B}$ tétel[37] tehát akkor és csak akkor következménye az $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ axiómáknak, ha (9) identitás. Jegyezzük meg, hogy $\mathfrak{B}$ a (9) formulából rendre $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ leválasztásával adódik; azaz diszciplínánk minden tételét megkaphatjuk leválasztás segítségével az axiómákból és egy identitásból. Fordítva, az axiómákból és identitásokból leválasztásokkal adódó bármely $\mathfrak{B}$ formula következménye az axiómáknak, hiszen ha olyan modellt választunk, amelyben $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \ldots = \mathfrak{A}_n = \uparrow$, valamennyi identitás értéke is $\uparrow$ lesz (mint minden modellben), tehát $\mathfrak{B} = \uparrow$ lesz, mert ha valamely modellben $\mathfrak{F} = \uparrow$ és $\mathfrak{F} \to \mathfrak{G} = \uparrow$, akkor $\mathfrak{G} = \uparrow$.

Ily módon a következmény fogalmát sikerült exakt módon megfogalmaznunk; ez a megfogalmazás azonban még mindig nem kielégítő. Ugyanis szerepel benne az identitás fogalma, amit végeredményben halmazelméleti eszközökkel definiáltunk. Azonkívül, minthogy nem áll rendelkezésünkre módszer annak eldöntésére, hogy egy adott formula identitás-e, a következmény e fogalma nem teljesíti azt a magától értetődő kívánságot, hogy ha valaki ilyen értelemben következtet, ellenőrizhessük, vajjon helyesen következtetett-e? Hiszen hivatkozhatott olyan formula identitásvoltára, amelyről nem tudjuk megállapítani, az-e; pl. közvetlenül nem evidens, hogy a (8) formula, ill. a belőle az (1) törvény ismételt alkalmazásával keletkező

$$N(c) \to ((x)\,(N(x) \to N(x')) \to ((x)(y)\,(\varDelta(x', y') \to \varDelta(x, y)) \to$$
$$\to ((x)(N(x) \to \overline{\varDelta(x', c)}) \to \overline{\varDelta(c', c''')})))$$

formula identitás. Ezért döntő tény a bizonyításelmélet szempontjából, hogy az identitás fogalmát definiálhatjuk halmazelméleti fogalmakra való hivatkozás nélkül is és hogy ez a definíció egyúttal

---

[37] Emlékeztetek arra, hogy «$\mathfrak{B}$ tétel» röviden a helyett a tétel helyett áll, amely azt fejezi ki, hogy $\mathfrak{B}$ értéke mindig $\uparrow$; hasonlóan «$\mathfrak{A}_i$ axióma» rövid kifejezés ahelyett, hogy «az az axióma, a mely úgy fejezhető ki, hogy $\mathfrak{A}_i$ értéke mindig $\uparrow$».

módot ad az identitásoknak egy ellenőrizhető eljárással való származtatására. A függvénykalkulusnak a halmazelmélettől való ily függetlenítéséhez vezet az elemi logika axiomatizálhatóságának a függvénykalkulusra való, GÖDELtől [38] származó kiterjesztése.

Nyilvánvaló, hogy identitásokból leválasztással is, helyettesítéssel is, megint identitások keletkeznek. A helyettesítés többféle lehet: elemi logikai változó vagy logikai függvény helyébe tetszőleges formulát,[39] szabad individuumváltozó vagy matematikai függvény helyébe tetszőleges, szabad változókból és matematikai függvényekből összetett kifejezést helyettesíthetünk; ha több

---

[38] K. GÖDEL, Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **37** (1930), 349—360. oldal. A szóbanforgó tételt GÖDEL-féle teljességi tételnek szokás nevezni; ugyanis a függvénykalkulus axiómarendszere már GÖDEL dolgozata előtt ismeretes volt (abban a formában, ahogyan itt szerepel, BERNAYS-tól származik; l. a 19. lábjegyzetben idézett HILBERT—ACKERMANN-féle mű 1. kiadását, Berlin, 1928, 53—54. oldal); GÖDEL eredményében az volt az új, hogy *minden* identitás megkapható a szövegben részletezett módon.

[39] Egy $\mathfrak{A}$ formulában egy $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ logikai függvény helyébe egy $\mathfrak{F}$ formulát helyettesíteni úgy kell, hogy $\mathfrak{A}$-nak minden egyes $F(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ alakú része helyébe, ahol $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ tetszőleges, szabad változókból és matematikai függvényekből összetett kifejezések, azt a formulát helyettesítjük, amely $\mathfrak{F}$-ből úgy keletkezik, hogy benne x_1 helyébe $\mathfrak{a}_1$-t, x_2 helyébe $\mathfrak{a}_2$-t, …, x_n helyébe $\mathfrak{a}_n$-et helyettesítjük. $\mathfrak{F}$-ben nem kell, vogy valamennyi x_i effektive szerepeljen (ha valamelyik nem szerepel, akkor a megfelelő $\mathfrak{a}_i$ helyettesítése természetesen elmarad); szerepelhetnek benne egyéb változók is, de nem szabad, hogy valamelyik további szabad változója ugyanúgy legyen jelölve, mint $\mathfrak{A}$-ban egy olyan kötött változó, amelyhez tartozó quantor hatáskörében előfordul valamelyik $F(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n)$. Ugyanis, ha e megszorítást nem tennők, identitásból nem mindig jutnánk identitáshoz; például $(x)(y)(F(x) \vee G(x,y)) \rightarrow (x)(F(x) \vee (y)G(x,y))$ identitás, de a belőle $F(x)$ helyébe $\overline{G(x,y)}$ helyettesítésével keletkező $(x)(y)(\overline{G(x,y)} \vee G(x,y)) \rightarrow$ $\rightarrow (x)(\overline{G(x,y)} \vee (y)G(x,y))$ formula nem az, mert az implikáció előtagja indentitás, utótagja pedig nem (pl. hamis lesz, ha indvidiuumtartománynak a természetes számok halmazát, $G(x,y)$-nak az $x=y$ logikai függvényt választjuk, az *y szabad* változó helyébe pedig (az implikáció utótagjában szereplő $\overline{G(x,y)}$-ban) 1-et teszünk. Hasonlóan értendő és hasonló megszorításnak van alávetve a matematikai függvények helyébe való helyettesítés.

helyen szerepel, akkor mindenütt ugyanazt. Kötött változó helyébe tetszőleges kötött változót helyettesíthetünk; itt nem fontos, hogy mindenütt ugyanazt, csak az, hogy egy-egy quantor alkalmazásával keletkező formularészben ugyanazt a kötött változót helyettesítsük helyébe.[40]

De könnyen átláthatjuk azt is, hogy identitásból identitást kapunk a következő operációkkal is. Legyen $\mathfrak{F}$ olyan formula, amelyben valamely a szabad változó nem szerepel, $\mathfrak{G}(a)$ olyan formula, amelyben szerepelhet a, végül $\mathfrak{G}(x)$ úgy keletkezzék $\mathfrak{G}(a)$-ból, hogy a helyébe mindenütt x-et teszünk benne. Akkor, ha $\mathfrak{F}\rightarrow\mathfrak{G}(a)$ identitás, $\mathfrak{F}\rightarrow(x)\mathfrak{G}(x)$ is az, és ha $\mathfrak{G}(a)\rightarrow\mathfrak{F}$ identitás, $(\mathsf{E}x)\,\mathfrak{G}(x)\rightarrow\mathfrak{F}$ is az. Nevezzük e két operációt, amelyek a mondott feltételek mellett $\mathfrak{F}\rightarrow\mathfrak{G}(a)$-t $\mathfrak{F}\rightarrow(x)\mathfrak{G}(x)$-be, ill. $\mathfrak{G}(a)\rightarrow\mathfrak{F}$-t $(\mathsf{E}x)\mathfrak{G}(x)\rightarrow\mathfrak{F}$-be viszik át, quantorkövetkeztetésnek.

Mármost Gödel említett axiomatizálhatósági tétele azt mondja ki, hogy minden identitás megkapható az elemi logika identitásaiból és véges számú további identitásból, mégpedig (3), (4), (5), (6)-ból,[41] helyettesítések, leválasztások és quantorkövetkeztetések segítségével. Az elemi logikai identitásokat,[42] továbbá (3), (4), (5), (6)-ot, a függvénykalkulus axiómáinak vagy logikai axiómáknak, a helyettesítést, leválasztást és quantorkövetkeztetést pedig következtetési szabályoknak nevezzük.

E szerint nem szűkítjük (se nem bővítjük) az identitás fogalmát, ha halmazelméleti definíciója helyett így definiáljuk: olyan for-

---

[40] Pl. a $(x)F(x)\vee(Ex)\overline{F(x)}$ formulából x helyére y-nak helyettesítésével a $(y)F(y)\vee(Ex)\overline{F(x)}$, $(x)F(x)\vee(Ey)\overline{F(y)}$ és $(y)F(y)\vee(Ey)\overline{F(y)}$ formulák bármelyike keletkezhetik; mind identitás, mert az eredeti formula az volt. Ezzel szemben az $F(a)\vee\overline{F(a)}$ identitásból a helyére b-nek helyettesítésével csak az $F(b)\vee\overline{F(b)}$ formula keletkezik; ez identitás, míg az $F(a)\vee\overline{F(b)}$, $F(b)\vee\overline{F(a)}$ formulák nem azok.

[41] Ha az identitás eredeti fogalmánál maradunk, azaz matematikai függvényeket s a $\Delta(x, y)$ függvényt nem tartalmazó formulákra szorítkozunk, akkor az (5) és (6) formulák elmaradnak és a helyettesítés fogalmát is megfelelőképpen szűkíthetjük. Az általános esetet könnyen visszavezethetjük erre az esetre.

[42] Vehetjük helyettük az elemi logika egy tetszőleges axiómarendszerét.

mula,[43] amely a függvénykalkulus axiómáiból a következtetési szabályok ismételt alkalmazásával adódik. S ha megkívánjuk, hogy valahányszor valaki egy axiómarendszerből való következtetés alkalmával arra hivatkozik, hogy valamely formula identitás, le is hozza a függvénykalkulus axiómái és következtetési szabályai segítségével, akkor mindig ellenőrizhetjük, vajjon helyesen hozta-e le. Természetesen kiindulhattunk volna az identitások e definíciójából is, azonban ez önkényesnek látszott volna és semmiképpen sem lett volna indokolt az identitások így nyert fogalmát használni fel a következmény fogalmának definiálására. Miután azonban a függvénykalkulus halmazelméleti bevezetése és a GÖDEL-féle axiomatizálhatósági tétel ugyancsak halmazelméleti bizonyítása[44] motiválta ezt a definíciót, nincs többé szükségünk halmazelméletre a bizonyításelmélet szempontjából, hanem a bizonyításelmélet kiindulópontjául választhatjuk a következő definíciót: a $\mathfrak{B}$ tétel következménye az $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ axiómáknak, ha leválasztásokkal megkapható $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$-ből és olyan formulákból, amelyek a logikai axiómákból a következtetési szabályok segítségével előállíthatók. Könnyen látható, hogy ehhez szükséges és elegendő, hogy $\mathfrak{B}$ előállítható legyen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$-ből és a logikai axiómákból a következtetési szabályok ismételt alkalmazásával, úgy azonban, hogy az $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$-ben szereplő logikai és matematikai függvények helyébe (amelyek az alapfogalmakat reprezentálták) nem végzünk helyettesítést. Ez a megszorítás abból származott, hogy feltettük, hogy $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ nem tartalmaznak tetszőleges individuumokat jelentő szabad változókat, sem tetszőleges tulajdonságot jelentő függvényváltozókat; ha ettől a megszorítástól elállunk, a definíciót úgy kell módosítanunk, hogy ezek helyébe is

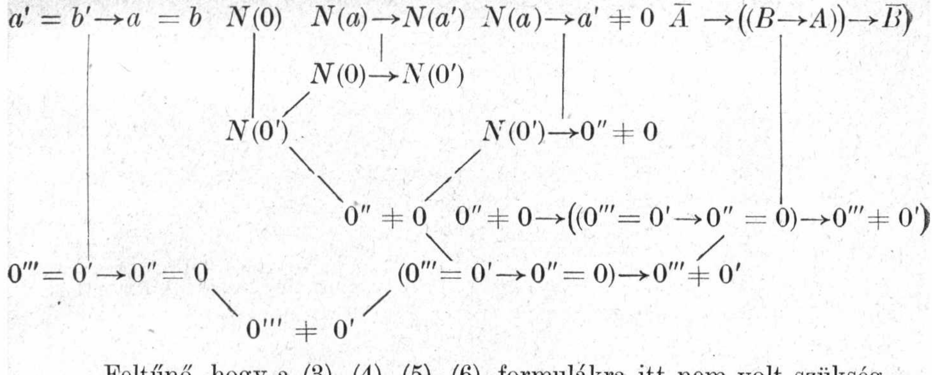
---

[43] Formulán itt elegendő az (indexszel ellátott vagy a nélküli) $a, b, c, \ldots$ $x, y, z, \ldots$; $f, g, h, \ldots$; $F, G, H, \ldots$ betűkből, zárjelekből, vesszőkből és a $\overline{}$, &, $\vee$, $\rightarrow$, E jelekből bizonyos könnyen megadható szabályok szerint felépített véges jelsorozatot érteni, tekintet nélkül arra, mit jelentenek e jelek s a formulák.

[44] Magától értetődik, hogy egy halmazelméleti fogalomnak egy másik fogalommal való egyenértékűségét nem is lehet halmazelméleti módszerek nélkül bebizonyítani.

szabad helyettesítenünk, csak az alapfogalmakat reprezentáló függvények helyébe nem.

Nevezzünk az $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ axiómarendszerből való *levezetésnek* olyan véges formulasorozatot, amelynek minden tagja vagy $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$, vagy a logikai axiómák egyike, vagy pedig a sorozat előző tagjaiból a következtetési szabályok egyikével keletkezik; akkor még úgy is kimondhatjuk az előbbi definíciót, hogy *a $\mathfrak{B}$ formula következménye az $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ axiómáknak, ha van a belőlük álló axiómarendszerben olyan levezetés, amelynek $\mathfrak{B}$ a végformulája.* A levezetés formuláit lineáris elrendezés helyett sokszor célszerűbb egy (faalakú, véges) gráf szögpontjaihoz írni, úgyhogy ennek élei mutassák, hogy a kérdéses formula mely formulákból keletkezett a következtetési szabályok valamelyikével.[45] Pl. a $0''' \neq 0'$ formula (egyik) levezetése az első négy PEANO-féle axiómából álló axiómarendszerben a következő:

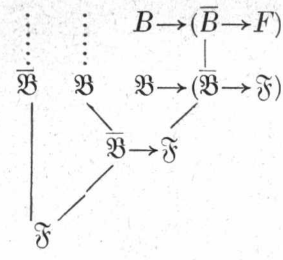


Feltűnő, hogy a (3), (4), (5), (6) formulákra itt nem volt szükség, csak az $\bar{A} \to ((B \to A) \to \bar{B})$ elemi logikai identitásra. Ez annak felel meg, hogy $0''' \neq 0'$ (azaz $3 \neq 1$) nagyon egyszerű következménye a PEANO-féle axiómáknak. A már említett $0' \neq 0'''$ formula levezetéséhez már a (6) formula is szükséges (ebből ugyanis mindenekelőtt az $a = b \to b = a$ formulát kell levezetnünk);

[45] A gráf-terminológia nagyon alkalmas a bizonyításelmélet sokszor bonyolult meggondolásainak szemléltetésére s ezzel érthetőbbé tételére. Maga HILBERT is alkalmaz hasonló geometriai terminológiát, amennyiben levezetés-ábráról, levezetés-fonalakról stb. beszél.

komplikáltabb aritmetikai tételek levezetéséhez a (3), (4), (5) formulákra, valamint quantorkövetkeztetésre is (és természetesen a teljes indukció axiómájára, továbbá a 47. lábjegyzetben szereplő axiómákra is) szükség van.

Mármost egy axiómarendszert akkor mondunk *ellentmondásosnak*, ha van olyan $\mathfrak{B}$ formula, hogy $\mathfrak{B}$ is, $\overline{\mathfrak{B}}$ is levezethető a mondott értelemben a kérdéses axiómarendszerben. Ekkor bármely $\mathfrak{F}$ formula levezethető; ugyanis $\mathfrak{B}$ és $\overline{\mathfrak{B}}$ levezetéséből és a $B \rightarrow (\overline{B} \rightarrow F)$ elemi logikai identitásból az oldalt látható vázlat szerint (egy helyettesítéssel és két leválasztással) $\mathfrak{F}$ levezetéséhez juthatunk. E szerint valamely axiómarendszer ellentmondásnélküliségének bebizonyításához elegendő *egy* olyan $\mathfrak{B}$ formulát találnunk, amelyről meg tudjuk mutatni, hogy nem lehet levezetés végformulája.[46] Pl. a természetes számok aritmetikájának axiómarendszere[47] esetén a $0 \neq 0$ formulát választhatjuk $\mathfrak{B}$ gyanánt.



---

[46] Ez a körülmény lényeges egyszerűsítést jelent az ellentmondásnélküliség vizsgálatában; végeredményben annak köszönhetjük, hogy az implikációt úgy definiáltuk, hogy $\downarrow \rightarrow \uparrow = \uparrow$.

[47] A természetes számok aritmetikájának felépítéséhez alkalmas axiómarendszernek a fentebb felsorolt PEANO-féle axiómákon kívül még tartalmaznia kell az összeadás és szorzás, esetleg más rekurziv függvények definíciójául szolgáló rekurziós formulákat is. Ezek az összeadásra és a szorzásra nézve a kovetkezők:

$$a + 0 = a,$$
$$a + b' = (a + b)';$$
$$a \cdot 0 = 0,$$
$$a \cdot b' = a \cdot b + a.$$

PEANO ezeket a formulákat használta az aritmetika felépítéséhez, de nem tekintette őket axiómáknak, hanem evidensnek vette, hogy van olyan $x + y$, ill. $x \cdot y$ függvény, amely teljesíti őket. Ezt a tényt — a bővített függvénykalkulus alkalmazása mellett — valóban be is lehet bizonyítani a PEANO-féle axiómák alapján (l. R. DEDEKIND, *Was sind und was sollen die Zahlen* (Braunschweig, 1888; *Gesammelte Math. Werke,* 3. kötet, Braunschweig, 1932, 335—391. oldal, különösen 361—372. oldal); E. LANDAU, *Grundlagen der Analysis* (Leipzig, 1930), 4—5. és

A bizonyításelmélet HILBERT által megfogalmazott célkitűzése: mindenekelőtt az eddig létrejött matematikai diszciplinák (aritmetika, analízis, geometria, halmazelmélet stb.) axiómarendszerének ellentmondásnélküliségét bebizonyítani; majd valahányszor a matematikának újabb ága keletkezik, azt is axiomatizálni és ellentmondásnélküliségét bebizonyítani. Foglalkozik a bizonyításelmélet emellett még a kérdéses axiómarendszerekkel kapcsolatos egyéb, a levezetés fent megadott fogalma segítségével ugyancsak megfogalmazható kérdésekkel, mint pl. az axiómarendszer függetlenségének és teljességének kérdésével is.

4. Az ellentmondásnélküliség bizonyítására szolgáló módszerek.

A legrégebbi módszer, amellyel ellentmondásnélküliséget bizonyítottak, a *modell-módszer* vagy *szótár-módszer*. Ez abban áll, hogy mindenekelőtt megadunk egy megfelelkezést, «szótárt», amely a vizsgált **A** axiómarendszernek minden alapfogalmához hozzárendeli egy másik **B** axiómarendszer egy-egy (alap- vagy definiált[48]) fogalmát; természetesen ugyanolyan természetűt, azaz logikai függvényhez ugyanannyi szabad változót tartalmazó formulát, matematikai függvényhez ugyanannyi változót tartalmazó kifejezést. E megfelelkezés segítségével az **A** axiómarendszer minden formulájához hozzárendelhetjük a **B** rendszer egy formuláját; olyan formulák, amelyekben az alapfogalmak nem szerepelnek, pl. a logikai axiómák, önmagukba mennek át. Legyenek az **A** rendszer $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ axiómáinak megfelelő formulák $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_n$.

14—15. oldal); hasonlóan be lehet bizonyítani a rekurziv definíció lehetőségét, a szűkebb függvénykalkulus alapulvétele mellett is, a PEANO-féle axiómarendszer olyan bővítésében, amelyben az aritmetikai függvények is az alapulvett individuumtartományhoz tartoznak és megfelelő axiómák állnak rendelkezésre ezek képezéséről. Magában a fent megfogalmazott PEANO-féle axiómarendszerben ki sem tudunk fejezni olyan tételt, hogy van olyan függvény, amelynek egy bizonyos tulajdonsága van.

[48] Az alapfogalmaknak matematikai vagy logikai függvények felelnek meg a formalizálásnál; a definiált fogalmaknak pedig ezekből összetett kifejezések vagy formulák.

Tegyük fel, hogy a $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_n$ formulák mind következményei **B** axiómáinak. Akkor bármely, **A** axiómáiból kiinduló levezetésből kaphatunk egy **B**-beli levezetést a következő eljárással. Mindenekelőtt az adott levezetés minden egyes formuláját pótoljuk a **B** rendszer megfelelő formulájával; azután az $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$-ből keletkezett $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_n$ «fölé» írjuk ezek levezetését. Ily módon valóban levezetést kapunk, mert, mint megjegyeztük, a logikai axiómák önmagukba mennek át s, mint könnyen belátható, ha bizonyos formulákból egy újabb formula a következtetési szabályok egyikével adódik, ugyanez áll megfelelőikre is. A kapott levezetés végformulája az eredeti levezetésének megfelelője.

Ha mármost feltesszük, hogy **B** ellentmondásnélküli, akkor adódik, hogy **A** is az. Mert ha volna két **A**-beli levezetés, amelynek végformulája $\mathfrak{F}$, ill. $\overline{\mathfrak{F}}$, akkor belőlük a mondott eljárással oly két **B**-beli levezetés keletkeznék, amelyeknek végformulája $\mathfrak{G}$, ill. $\overline{\mathfrak{G}}$, ahol $\mathfrak{G}$ az $\mathfrak{F}$ megfelelője.

A leírt módszerről azt is szokás mondani, hogy a **B** rendszerben *modellt* konstruáltunk az **A** rendszer számára. Ilyen eljárást már Bolyai János alkalmazott, amikor az euklidesi párhuzamosság axiómája tagadásával keletkező geometriai rendszerében modellt konstruált az euklidesi geometria részére, pontnak pontot, egyenesnek paraciklust, síknak paraszférát feleltetvén meg. Célja ezzel nem ellentmondásnélküliség bizonyítása, hanem a Bolyai-geometriának az euklidesi geometria tételei segítségével való gyorsabb felépítése volt; nem is volna nagyon érdekes az az eredmény, amit e módszer az ellentmondásnélküliség kérdésében adna, t. i. az, hogy ha a Bolyai-féle geometria ellentmondásnélküli, akkor az euklidesi is az. Sokkal fontosabb tény ennek megfordítása, t. i. ha az euklidesi geometria ellentmondásnélküli, akkor a Bolyai-féle is az. Erről a tényről Bolyai is meg volt győződve és ezt Appendixe címében is kifejezte; bebizonyítása a Bolyai-geometriának az euklidesi geometriában konstruált Cayley—Klein-féle modelljével adható.[49] Ez a modell, ha egyszerűség kedvéért a sík-

[49] A. Cayley, A Sixth Memoir upon Quantics, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **149** (1859), 61—90. oldal (*Collected*

geometriára szorítkozunk, pontnak egy kör belsejében fekvő pontot, egyenesnek e kör húrját felelteti meg; a közöttfekvés fogalma önmagába megy át, az AB és CD szakaszok egybevágósága pedig az $UABU'$ és $VCDV'$ pontnégyesek projektív vonatkozásába, ahol U, U' és V, V' a megfelelő húrok végpontjai. E megfelelkezés az euklidesi geometria axiómáit, a párhuzamosság axiómájának kivételével, az euklidesi geometria tételeibe viszi át. E szerint a párhuzamosság axiómája nem bizonyítható be az euklidesi geometria többi axiómája alapján, feltéve, hogy azok ellentmondásnélküli axiómarendszert alkotnak.

A modell-módszerrel sikerült HILBERTnek az euklidesi geometria ellentmondásnélküliségét a valós számok aritmetikájáéra visszavezetni; az alkalmazott megfelelkezés az, amellyel az analitikus geometria feleltet meg geometriai fogalmaknak aritmetikaiakat. Ha a folytonosság axiómáját elhagyjuk és bizonyos, körök és egyenesek metszéspontjának létezésére vonatkozó axiómákkal pótoljuk,[50] akkor ugyane módszerrel visszavezethetjük a geometria ellentmondásnélküliségét az algebrai számok aritmetikájának egy bizonyos axiómarendszerére. Viszont ugyancsak e módszerrel sikerül a racionális s az algebrai számok aritmetikájának ellentmondásnélküliségét a természetes számok aritmetikájáéra visszavezetni; az ehhez szükséges megfelelkezés arra emlékeztet, amelynek segítségével a racionális s az algebrai számok halmazának megszámlálhatóságát szokás bebizonyítani.[51] Hasonló, a halmazelmélet-

---

Math. Papers, **2**, Cambridge, 1889, 561—592. oldal és KÁRMÁN FERENC magyar fordításában: Az algebrai alakokról, hatodik értekezés, *Math. és Phys. Lapok*, **6** (1897), 195—242. oldal); F. KLEIN, Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, *Math. Annalen*, **4** (1871), 573—625. oldal. L. még HILBERTnek a 8. lábjegyzetben idézett műve 38. oldalát.

[50] L. KERÉKJÁRTÓ, 8. lábjegyzetben idézett mű, 145. oldal. EUKLIDES sohasem használta a folytonosság axiómáját, hanem a kérdéses metszéspontok létezését evidensnek vette. A szó szoros értelmében vett *elemi* geometriai tételek bizonyításához nincs szükség a folytonosság axiómájára, mindenütt lehet pótolni hasonló jellegű egyszerűbb axiómával.

[51] Itt azonban sokkal egyszerűbb megfelelkezésről van szó, mint a kérdéses halmazelméleti tételnél; mert itt csak a véges számú alapfogalomnak kell egy-egy fogalmat megfeleltetnünk. Pl. az összeadásnak,

ből ismert megfelelkezés segítségével, visszavezethetjük az analízis axiómarendszere egy töredékének ellentmondásnélküliségét a valós számok aritmetikájáéra; ez a töredék elegendő az ú. n. klasszikus analízisnek felépítéséhez, amely magában foglalja a komplex változós függvénytant s a folytonos függvények elméletét, csupán a valós függvénytannak patologikus függvényekkel foglalkozó ágát nem.

A modell-módszer egyik legutóbbi és talán legmélyebb alkalmazását GÖDEL adta, megmutatván, hogy ha a halmazelmélet axiómarendszere ellentmondásnélküli, akkor nem lehet benne megcáfolni a CANTOR-féle $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ kontinuum-hipotézist.[52] E célból a ZERMELO—FRAENKEL-féle axiómarendszeren belül adott olyan modellt, amelyben a halmazelmélet axiómáin kívül a CANTOR-féle hipotézis, sőt ennek $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ általánosítása is, bebizonyítható tételek. E modell abban áll, hogy a «halmaz» fogalmának a «logikailag jellemezhető halmaz» fogalmát felelteti meg; a tartalmazás relációja önmagába megy át. A logikailag jellemezhető halmaz fogalmához a következőképpen jutunk. Egy M halmaz valamely N részhalmazát akkor nevezzük «közvetlenül jellemezhetőnek», ha van olyan, szabad és kötött változókból, az azonosság $a=b$ és a tartalmazás $a \in b$ relációjából az elemi logika műveleteivel és quantorokkal felírható $\mathfrak{N}(u; a_1, a_2, \ldots, a_n)$ formula és M-nek olyan $m_1, m_2, \ldots, m_n$ elemei, hogy M valamely u eleme akkor és csak akkor eleme $\mathfrak{N}$-nek, ha $\mathfrak{N}(u; m_1, m_2, \ldots, m_n) = \uparrow$. Pl. minden véges $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ részhalmaz közvetlenül jellemezhető: $\mathfrak{N}$-et elegendő $u=a_1 \vee \vee u=a_2 \vee \ldots \vee u=a_n$-nek választani; de maga M is közvetlenül jellemezhető részhalmaza magának: $\mathfrak{N}$ legyen $u=u$ $(n=0)$. Mármost legyen M_0 a $\{0\}$ halmaz, s ha M_β a $\beta<\alpha$ rendszámokra már értelmezve van, M_α az $M_{\alpha-1}$ közvetlenül jellemezhető részhal-

amely az algebrai számok axiómarendszerében alapfogalom, egy pusztán számelméleti eszközökkel definiált $\sigma(x, y)$ függvény felel meg, amely egyébként az $\alpha_i + \alpha_j = \alpha_{\sigma(i,j)}$ tulajdonsággal bír, ahol α_n az algebrai számok egy bizonyos megszámlálásánál az n-edik algebrai szám.

[52] K. GÖDEL, The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis, *Proceedings of the National Academy Washington*, **24** (1938), 556—557; Consistency-Proof for the Generalized Continuum-Hypothesis, *ugyanott*, **25** (1939), 220—224. oldal.

mazainak halmaza, ill. az összes M_β-k ($\beta<\alpha$) egyesítési halmaza a szerint, hogy α elsőfajú szám-e, vagy limesszám. Logikailag jellemezhető egy halmaz, ha valamelyik M_α-nak eleme. Ez a fogalom felírható a halmazelmélet alapfogalmai segítségével; hiszen a logikai műveletek és a quantorok is definiálhatók ezekkel. GÖDEL a ZERMELO—FRAENKEL-féle axiómák segítségével (a kiválasztási axiómát fel sem használva) megmutatja, hogy ha «halmaz» helyébe «logikailag jellemezhető halmaz»-t teszünk, valamennyi ZERMELO—FRAENKEL-féle axióma, a kiválasztási axiómát is beleértve, bebizonyítható tételbe megy át, de ráadásul még az általánosított CANTOR-féle sejtés is (pl. a ZERMELO-féle $Z=\{0, \{0\}, \{\{0\}\},\ldots\}$ megszámlálható halmaz azon részhalmazait, amelyek logikailag jellemezhetők, sikerül effektíve, Ω típusban jólrendeznie). A helyzet itt az, hogy a ZERMELO—FRAENKEL-féle axiómarendszer nem határozza meg eléggé a halmaz fogalmát, egy bizonyos tágasságot hagy számára; GÖDEL azt mutatta meg, hogy ha e fogalmon az axiómák által megengedett legszűkebb fogalmat, logikailag jellemezhető halmazt, értünk, akkor *igaz* a jólrendezési tétel is (a logikailag jellemezhető halmazokat sikerül valóban jólrendezni) és az általánosított CANTOR-féle sejtés is.

A modell-módszer mindig csak *relatív* ellentmondásnélküliség-bizonyításra használható; azaz mindig csak olyan eredményre vezet, hogy egy **A** axiómarendszer ellentmondásnélküli, ha egy bizonyos másik **B** axiómarendszer az. *Abszolút* ellentmondásnélküliség-bizonyításhoz más módszerekre van szükség.

A legegyszerűbb ilyen módszerre rávezet bennünket a következő heurisztikus meggondolás, amelyet gyakran hoznak fel egy-egy diszciplina ellentmondásnélküliségének igazolására. Az axiómák igazak; igaz tételekből csak igaz következhetik; tehát minden bebizonyítható tétel igaz; márpedig két egymásnak ellentmondó állítás közül az egyik hamis. A hiba ebben a meggondolásban ott van, hogy valamely matematikai diszciplina ítéleteinek igaz vagy hamis voltát épp a kérdéses diszciplina axiómarendszere segítségével definiáljuk; igaz egy ítélet, ha levezethető, hamis, ha megcáfolható, azaz, ha tagadása vezethető le. A fenti meggondolásban felhasználtuk, hogy egy ítélet nem lehet igaz is, hamis is; ez pedig épp az axiómarendszer ellentmondásnélkülisége.

Megeshetik azonban, hogy sikerül valahogyan (a levezethetőség fogalmától függetlenül) hozzárendelni egy axiomatizált diszciplina formuláihoz az $\uparrow$ és $\downarrow$ logikai értékeket úgy, hogy 1. ha egy $\mathfrak{F}$ formulához az $\uparrow$-at rendeltük, akkor a $\downarrow$-at nem rendeltük hozzá; 2. ha $\mathfrak{F}$-hez az $\uparrow$-at rendeltük, akkor az $\overline{\mathfrak{F}}$-hoz a $\downarrow$-at rendeltük; 3. az axiómákhoz az $\uparrow$-at rendeltük; 4. ha bizonyos formulákhoz az $\uparrow$-at rendeltük s egy további formula a következtetési szabályok egyikével keletkezik belőlük, akkor ehhez is az $\uparrow$-at rendeltük. Ez esetben a fenti meggondolás alkalmas az axiómarendszer ellentmondásnélküliségének bebizonyítására. Ez az ú. n. *értékelési módszer* KŐNIG GYULÁtól származik.[53] Bár az az axiómarendszer, amelyre alkalmazta, csak az aritmetika egy töredékének felépítésére alkalmas (quantorok nem állnak benne rendelkezésre), mégis nagyjelentőségű, hogy ezzel, HILBERTet megelőzve, az első abszolút ellentmondásnélküliség-bizonyításhoz jutott.

Olyan axiómarendszerre, amelyben általános és exisztenciális ítéletek szabadon kombinálva kifejezhetők quantorok segítségével, HERBRAND és PRESBURGER[54] adaptálták az értékelési módszert. Ilyen axiómarendszerek esetén a logikai értékeknek formulákhoz való hozzárendelése két lépésben történik; először minden quantort tartalmazó formulához hozzárendelünk egy quantornélkülit, mintegy «kiintegrálva» a benne szereplő quantorokat; azután a quantornélküli formulákhoz rendelünk logikai értékeket. Ezt a *kiintegrálási módszert* PRESBURGER arra az axiómarendszerre alkalmazta, amely a PEANO-féle axiómákból úgy keletkezik, hogy

[53] J. KŐNIG, *Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenehre* (Leipzig, 1914), 110—122. és 181—184. oldal.

[54] J. HERBRAND, Recherches sur la théorie de la démonstration, *Travaux de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, Classe III, No. **33** (1930), különösen Chapitre IV; M. PRESBURGER, Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt, *Comptes rendus du I. Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves*, 1929 (1930), 92—101. oldal.

az összeadás rekurziv definícióját hozzájuk csatoljuk, de a szorzásét vagy komplikáltabb függvényekét nem; a kiintegrálást az teszi lehetővé, hogy e rendszer minden exisztencia-problémája úgy fejezhető ki, hogy van-e egy numerikusan adott együtthatókkal bíró, lineáris egyenletekből, egyenlőtlenségekből és numerikusan adott modulusú lineáris kongruenciákból álló rendszernek megoldása; ennek szükséges és elegendő feltétele pedig «zárt alakban», azaz quantorok nélkül is felírható. Ha a szorzás rekurziv definícióját is hozzávesszük, akkor nem várható, hogy ilyen kiintegrálás lehetséges, mert akkor olyan formulákhoz is jutunk, amelyek mindmáig megoldatlan problémát fejeznek ki; pl. a GOLDBACH-féle sejtés a

$$(x)\,(\mathsf{E}y)\,(\mathsf{E}z)\,(x+x=y+z\ \&\ (u)\,(v)\,(y=uv\rightarrow(y=u \vee y=v))\ \&$$
$$\&\ (u)\,(v)\,(z=uv\rightarrow(z=u\vee z=v)))$$

formula $\uparrow$ értékűségét mondja ki. Sőt, mint GÖDEL megmutatta,[55] minden, akármilyen komplikált rekurziv függvények segítségével fogalmazható probléma kifejezhető pusztán összeadással és szorzással.

A quantorokat mindig pótolhatjuk a HILBERT-féle ε-szimbolummal. Ezt HILBERT az egyetlen

$$F(a)\rightarrow F\,(\varepsilon_x\,F(x)) \tag{9}$$

axiómával jellemzi, amiből látszik, hogy $\varepsilon_x F(x)$ csak annyiban van meghatározva, hogy ha van egyáltalában olyan a elem, amelyre $F(a)=\uparrow$, $\varepsilon_x F(x)$ az ilyen elemek egyikét jelenti, egyébként határozatlan; ha nincs ilyen a elem, akkor $\varepsilon_x F(x)$ teljesen határozatlan. Világos az ε-szimbolumnak a kiválasztási axiómával való kapcsolata: ha azon x-ek halmaza, amelyekre $F(x)=\uparrow$, nem üres, $\varepsilon_x F(x)$ e halmaznak, ha pedig üres, az egész individuumtartománynak «kitüntetett elemét» jelenti. Az ε-szimbolum segítségével a quantorok definiálhatók: $(\mathsf{E}x)F(x)$ definíciója $F(\varepsilon_x F(x))$, $(x)F(x)$-é pedig $F(\varepsilon_x\overline{F(x)})$. E definíciót alkalmazva a (4) axióma a (9) axiómával azonos, a (3) pedig belőle elemi logikai identitás segítségével,

[55] K. GÖDEL, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **38** (1931), 173—198. oldal, különösen Satz VII, 191—193. oldal.

helyettesítéssel és leválasztással adódik; azonkívül a quantor-következtetések is visszavezethetők a (9) axióma segítségével helyettesítésekre és leválasztásokra. Így az ε-szimbolum lényegesen egyszerűsíti az axiomatikus apparátust; azonban magát a nehézséget nem szünteti meg; az ε-t tartalmazó formulák értékelésére előbb az ε-okat kell eliminálnunk belőlük, ami szintén csak nagyon egyszerű axiómarendszerek esetén sikerül.

Az értékelési módszer fontos módosítását fogalmazta meg NEUMANN JÁNOS, felhasználva bizonyos, HILBERTtől származó gondolatokat.[56] NEUMANN megjegyzése szerint nem szükséges egy fix értékelést (logikai értékek hozzárendelését) meghatároznunk az összes formulák számára; elegendő egy olyan utasítást megadnunk, amely, valahányszor adva van egy levezetés, az abban szereplő formulákhoz rendeli hozzá egyértelműen a logikai értékek egyikét; hogy melyiket, az függhet a foımulán kívül a kérdéses levezetéstől is. Ha a hozzárendelés olyan, hogy a fenti 1., 3. és 4. feltételek egy-egy levezetésen belül teljesülnek, továbbá egy $\mathfrak{F}$ & $\overline{\mathfrak{F}}$ alakú formulához mindég a $\downarrow$ értéket rendeljük (ha ugyan egyáltalában szerepel levezetés formulájaként; épp azt akarjuk megmutatni, hogy nem szerepelhet), akkor adódik, hogy az ilyen alakú formulák nem vezethetők le, tehát a rendszer ellentmondásnélküli. Ha az értékelést kiintegráláson, ill. az ε-szimbolum eliminálásán át adjuk meg (HILBERTnél ez utóbbi formában szerepel a módszer), akkor a kiintegrálás, ill. eliminálás módja függhet attól a levezetéstől, amelyben a kiintegrálandó, ill. ε-t tartalmazó formula szerepel.

Az így módosított értékelési módszerrel NEUMANN [56] és ACKERMANN,[57] majd annak továbbfejlesztésével HERBRAND,[58] olyan axiómarendszerek ellentmondásnélküliségét mutatták meg, ame-

---

[56] L. a 16. lábjegyzetben idézett munkát.

[57] W. ACKERMANN, Begründung des «tertium non datur» mittels der HILBERTschen Theorie der Widerspruchsfreiheit, *Math. Annalen*, **93** (1925), 1—36. oldal.

[58] L. az 54. lábjegyzetben idézett munkát; továbbá: J. HERBRAND, Sur la non-contradiction de l'arithmétique, *Journal für die reine und angewandte Math.*, **166** (1932), 1—8. oldal.

lyek a PEANO-féle axiómarendszerből rekurziv definíciók hozzávételével, de a teljes indukció axiómájának megszűkítésével keletkeznek; pl. HERBRANDnál akármilyen komplikált rekurziv definíciók meg vannak engedve, de a teljes indukció axiómájának F függvényváltozója helyébe csak olyan formulát szabad helyettesíteni, amely nem tartalmaz quantort. Ez az axiómarendszer praktice elegendő a számelmélet felépítéséhez; hiszen az általános quantort szabad változók használatával pótolhatjuk, az exisztenciális quantort pedig többnyire sikerül azáltal elkerülnünk, hogy azt a számot, amelynek létezését állítjuk, effektíve megadjuk rekurzive definiált függvények segítségével; pl. azt a tételt, hogy végtelen sok prímszám van, a helyett, hogy úgy fejeznők ki, hogy tetszőleges n-hez van n-nél nagyobb prímszám, úgy fogalmazzuk, hogy $n!+1$ legkisebb 1-nél nagyobb osztója[59] n-nél nagyobb prímszám. Kétségtelen, hogy ez az eljárás lényegesen komplikálja a számelmélet felépítését és az sem eleve evidens, hogy minden tételt át lehet így fogalmazni. Ezért kívánatos volt, HERBRAND eredménye után is, minden megszorítás nélkül megmutatni a természetes számok aritmetikájának ellentmondásnélküliségét.

Ezt a feladatot GENTZEN oldotta meg.[60] GENTZEN a levezetés egy másik, a köznapi nyelven kifejezett következtetésmódokhoz jobban símuló definíciójából indul ki, azonban át lehet alakítani meggondolását úgy, hogy a régi definíciót vesszük alapul;[61]

---

[59] Valamely a szám legkisebb 1-nél nagyobb osztója a-nak rekurzióval definiálható függvénye.

[60] G. GENTZEN, Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, *Math. Annalen*, **112** (1936), 493—565. oldal; Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie, *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften*, Neue Folge, **4** (1938), 19—44. oldal.

[61] A GENTZEN-féle bizonyításnak egy ilyen átalakítása szerepel egy rövidesen közlendő dolgozatomban. Legutóbb, a GENTZEN-féle bizonyítás egyik lényeges gondolatát átvéve, ACKERMANN a régi (a mindenkori levezetéstől függő) értékelési módszerrel is bebizonyította a természetes számok aritmetikájának ellentmondásnélküliségét; l. W. ACKERMANN, Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie, *Math. Annalen*, **117** (1940), 162—194. oldal.

ezáltal egyszerűbb is lesz és a régebbi ellentmondásnélküliség-bizonyításokhoz való viszonya is világosabban kitűnik. A továbbiakban, amikor GENTZEN ellentmondásnélküliség-bizonyításáról referálok, egy ilyen átalakítására gondolok.

GENTZEN módszere egy speciális levezetés-transzformáción alapul. Levezetésnek más levezetéssé való átalakítása szerepel az ellentmondásnélküliség bizonyításának régebbi módszereinél is. A modell-módszer is ilyen transzformáción alapul; de míg ott egy **A** axiómarendszerhez tartozó levezetést egy másik **B** axiómarendszerhez tartozó levezetésbe transzformáltunk, itt a transzformált levezetés is ugyanahhoz az axiómarendszerhez tartozik, mint az eredeti. Előkészítő lépésként szerepelnek ilyen értelemben vett transzformációk az értékelési módszernél is; ott célszerű a levezetést, az értékelés megadása előtt, úgy átalakítani, hogy valamennyi szükséges helyettesítést mindjárt az axiómákon elvégezzük és az így keletkezett formulákból pusztán a többi következtetési szabály segítségével jutunk el a végformulához.

Mármost közelfekvő az a gondolat, hogy axiómarendszerünk ellentmondásnélküliségét egy olyan levezetés-transzformáció megadásával mutassuk meg, amely minden levezetéshez, hacsak az nem nagyon egyszerű, egy ugyanazon végformulával bíró, de bizonyos szempontból egyszerűbb levezetést rendel. Az egyszerűsítés például abban állhatna, hogy a levezetésben szereplő quantorok számát vagy az alkalmazott teljes indukciók számát csökkentjük. Hiszen abban az esetben, ha egy quantor sem szerepel a levezetésben, vagy ha egy teljes indukciót sem alkalmazunk benne, KŐNIG GYULA, ill. ACKERMANN és NEUMANN JÁNOS már említett módszerei elintézik az ellentmondásnélküliség kérdését.

Nem várhatjuk, hogy bármely formula levezetését sikerül ilyen értelemben egyszerűsítenünk; azonban az ellentmondásnélküliség szempontjából elegendő olyan levezetésekre szorítkoznunk, amelyek végformulája numerikus, azaz sem kötött, sem szabad változót nem tartalmaz; hiszen elegendő azt megmutatnunk, hogy egy speciális *numerikus* formula, pl. $0 \neq 0$, nem lehet levezetés végformulája. Ilyen numerikus végformulájú levezetések esetében a következő két egyszerűsítési lehetőségre gondolhatunk.

Ha az utolsó, a levezetésben alkalmazott «lényeges» következtetés egy teljes indukció alkalmazása[62] volt, akkor a teljes indukcióval bebizonyított $\mathfrak{F}(n)$ tételnek tulajdonképpen csak egy numerikus speciális esetére, pl. $\mathfrak{F}(3)$-ra van szükségünk. Egy ilyen speciális eset azonban *teljes indukció nélkül* is adódik a teljes indukció premisszáiként szereplő $\mathfrak{F}(0)$ és $\mathfrak{F}(n) \to \mathfrak{F}(n')$ formulákból, pl. $\mathfrak{F}(3)$ a következő séma szerint:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathfrak{F}(0) & & \mathfrak{F}(0)\to\mathfrak{F}(1) & & & & \\
 & \mathfrak{F}(1) & & \mathfrak{F}(1)\to\mathfrak{F}(2) & & & \\
 & & \mathfrak{F}(2) & & \mathfrak{F}(2)\to\mathfrak{F}(3) & & \\
 & & & \mathfrak{F}(3) & & &
\end{array}$$

(ez az a mód, amivel a teljes indukció jogosultságát heurisztikusan szoktuk igazolni).

Ha az utolsó «lényeges» következtetés egy quantorkövetkeztetés volt, pl. $\mathfrak{F} \to \mathfrak{G}(a)$-ról következtettünk $\mathfrak{F} \to (x)\mathfrak{G}(x)$-re, s ugyanez a $(x)\mathfrak{G}(x)$ szerepel a levezetésben, a végformulától «lényeges» következtetéssel el nem választva, a $(x)\mathfrak{G}(x) \to \mathfrak{G}(\mathfrak{a})$ logikai axióma (pontosabban: logikai axiómából helyettesítéssel keletkező formula) kapcsán, akkor az eredeti levezetés helyett két egyszerűbb részlevezetést végezhetünk, két esetet különböztetvén meg a szerint, hogy $\mathfrak{G}(\mathfrak{a})$ igaz-e, vagy hamis; az első esetben a $(x)\mathfrak{G}(x) \to \mathfrak{G}(\mathfrak{a})$ logikai axiómát lehet megtakarítani, a második esetben pedig a quantorkövetkeztetést.[63]

---

[62] A Gentzen-féle bizonyítás szempontjából célszerű a teljes indukciót nem (függvényváltozót tartalmazó) axiómának, hanem a logikaiaktól különböző «aritmetikai» következtetési szabálynak tekinteni, amely az $\mathfrak{F}(0)$ és $\mathfrak{F}(n) \to \mathfrak{F}(n')$ formulákból az $\mathfrak{F}(n)$ formulához vezet (n szabad változó). Ez a teljes indukciós következtetési szabály egyenértékű a teljes indukció axiómájával; l. pl. Hilbert—Bernays, a 19. lábjegyzetben idézett mű, 265—267. oldal.

[63] Formálisan úgy történik a két eset megkülönböztetése, hogy az egyik részlevezetésben $\mathfrak{G}(\mathfrak{a})$-t, a másikban $\overline{\mathfrak{G}(\mathfrak{a})}$-t írjuk a levezetés for-

Mindkét egyszerűsítő transzformáció szerepelt már HILBERT göttingai előadásaiban (az utóbbi kissé más formában, quantor helyett az ε-szimbolumra vonatkozólag); azonban csak eléggé egyszerű levezetések esetén látszik azonnal, hogy célravezetnek, azaz a levezetést még tovább egyszerűsítik. Hiszen ha például az első transzformációnál $\mathfrak{F}(n) \rightarrow \mathfrak{F}(n')$-t eredetileg teljes indukciók sorozatával vezettük le, akkor a teljes indukciók száma megháromszorozódik,[64] mert a transzformáció után $\mathfrak{F}(0) \rightarrow \mathfrak{F}(1)$-et, $\mathfrak{F}(1) \rightarrow \mathfrak{F}(2)$-t és $\mathfrak{F}(2) \rightarrow \mathfrak{F}(3)$-at külön-külön le kell vezetnünk; hasonlóan megháromszorozódik az $\mathfrak{F}(n) \rightarrow \mathfrak{F}(n')$ levezetésében szereplő quantorok száma is. A másik transzformációnál pedig egy komplikáltabb levezetésből két egyszerűbb levezetést hoztunk létre, tehát a szemügyre vett quantorkövetkeztetést «megelőző» lényeges következtetések számát megkétszereztük. Igaz ugyan, hogy a transzformáció után *ugyanazt* a lényeges következtetést kell végeznünk többször, ez azonban nem változtat azon, hogy az «egyszerűsödés» nem mérhető a levezetésben szereplő lényeges következtetések számának csökkenésével.

GENTZEN lényegesen új ideája, hogy a levezetések komplikáltságát nem a bennük szereplő teljes indukciók és quantorkövetkeztetések *számával* méri, egyáltalában nem véges természetes számmal, hanem egy *transzfinit rendszámmal,* amely a levezetésben szereplő következtetések összekapcsolódásának módjától is függ.

---

mulái elé implikációs előtagként. Könnyű helyreállítani e változtatás után a levezetés-jelleget. A levezetés valamely alkalmas későbbi helyén egyesítjük a két részlevezetést, amennyiben a $\mathfrak{G}(\mathfrak{a}) \rightarrow \mathfrak{H}$ és $\overline{\mathfrak{G}(\mathfrak{a})} \rightarrow \mathfrak{H}$ alakú formulákból és a $(G \rightarrow H) \rightarrow ((\overline{G} \rightarrow H) \rightarrow H)$ elemi logikai identitásból helyettesítés és két leválasztás segítségével eljuthatunk az eredeti levezetésben szereplő $\mathfrak{H}$ formulához. A $\mathfrak{G}(\mathfrak{a})$ implikációs előtag alkalmazásával keletkező részlevezetésben az eredeti $(x)\mathfrak{G}(x) \rightarrow \mathfrak{G}(\mathfrak{a})$ logikai axióma szerepét a $\mathfrak{G}(\mathfrak{a}) \rightarrow ((x)\mathfrak{G}(x) \rightarrow \mathfrak{G}(\mathfrak{a}))$ formula veszi át; ez az $F \rightarrow (G \rightarrow F)$ identitásból keletkezik helyettesítéssel. A másik részlevezetésben a quantorkövetkeztetést azáltal takaríthatjuk meg, hogy $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}(a)$-ból helyettesítéssel $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}(\mathfrak{a})$-t kapjuk, ebből s az $(F \rightarrow G) \rightarrow$ $\rightarrow (\overline{G} \rightarrow (F \rightarrow H))$ identitásból helyettesítéssel és leválasztással megkaphatjuk $\overline{\mathfrak{G}(\mathfrak{a})} \rightarrow (\mathfrak{F} \rightarrow (x)\mathfrak{G}(x))$-et.

64 Ha $\mathfrak{F}(3)$ helyett $\mathfrak{F}(100)$-ra volna szükségünk, megszázszorozódnék.

Ez a transzfinit szám effektíve felírható, mihelyt a levezetés fel van írva; mindig kisebb, mint az első $\varepsilon_0 = {}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\omega^{\omega}}}}}}$ epszilon-szám. GENTZEN megmutatja, hogy minden numerikus végformulájú levezetés vagy egyszerűsíthető a helyettesítéseknek a levezetés elejére való áthelyezése, majd az előbb említett két transzformáció egyikének alkalmazásával, abban az értelemben, hogy a kérdéses transzformáció csökkenti a komplikáltságát kifejező rendszámot; vagy pedig, ha e transzformációk nem alkalmazhatók a levezetés egyszerűsítésére (pl. ha a levezetés komplikáltsági foka már 0), akkor az értékelési módszerrel direkt meg lehet mutatni, hogy végformulája nem lehet $0 \neq 0$ (vagy más hamis numerikus formula). Minthogy rendszámok csökkenő sorozata csak véges számú tagból állhat, e transzformációk iterált alkalmazása után előbb-utóbb bekövetkezik az értékelési módszer alkalmazási lehetősége.

A GENTZEN-féle eredmény, figyelembevéve a modell-módszer nyujtotta eredményeket is, a természetes számok aritmetikája ellentmondásnélküliségén kívül szolgáltatja a racionális s az algebrai számok elméletének, továbbá a folytonossági axióma nélküli elemi geometriának ellentmondásnélküliségét is. Remélhető, hogy a módszert ki lehet terjeszteni az analízisre is; ez esetben az egyszerűsödés megmutatása feltétlenül sokkal bonyolultabb lesz (a második számosztály lényegesen magasabb rendszámáig kell elmenni) és nincs kizárva, hogy olyan bonyolult, hogy emberileg lehetetlen áttekinteni.

5. Az ellentmondásnélküliség bizonyításának jelentősége.

Sokszor kérdezik, hogy mi okunk van egy ilyen ellentmondásnélküliség-bizonyítás elfogadására. A legegyszerűbb válasz erre az, hogy ugyanaz az okunk, mint akármilyen más matematikai bizonyítás, mint például az algebra alaptétele, vagy a zárt görbékre vonatkozó JORDAN-féle tétel bizonyításának elfogadására. Ha a matematika más ágaiban nem vagyunk szkeptikusak, nincs okunk az aritmetika ellentmondásnélküliségében sem kételkednünk GENTZEN bizonyítása után.

A halmazelmélet antinómiái létrehoztak olyan kritikai irányokat is, amelyek elsősorban az antinómiák elkerülésére, ezenfelül azonban az e közben felvetődött szempontok konzekvens keresztülvitelére is, azt kívánják, hogy bizonyos következtetési módokat kerüljünk el, még annak árán is, hogy ezáltal megcsonkítjuk a klasszikus matematikát. E kritikai irányokra való tekintettel fontos megjegyezni, hogy a bizonyításelmélet nyujtotta ellentmondásnélküliség-bizonyítások még a legradikálisabb ilyen kritikai iránynak, az ú. n. intuicionizmusnak tilalmait sem hágják át (míg pl. a JORDAN-tétel bizonyításai áthágják azokat).

A legtöbb matematikus azonban úgy gondolkodik ebben a kérdésben, hogy a matematika többi ágaiban nem tart ugyan helyénvalónak semmiféle kételkedést, azonban a bizonyításelméletet sokkal szkeptikusabban kezeli, mert ha már egyszer bebizonyítják neki valamely axiómarendszer ellentmondásnélküliségét, látni akarja, mennyiben jelent ez haladást, mennyiben ad olyasmit, amit eddig nem tudott. E tekintetben arra hivatkozhatunk, hogy az említett ellentmondásnélküliség-bizonyításokat úgy lehet megfogalmazni, hogy azok egy-egy módszert adnak nekünk, egy-egy képességet közölnek velünk, egy-egy eljárásra tanítanak bennünket, amelynek segítségével minden olyan állítólagos levezetéspárban, amelynek végformulái egymás negációi, meg tudunk jelölni egy hibát,[65] azaz egy olyan formulát, amely nem a megengedett következtetési szabályok egyikével adódott azokból a formulákból, amelyekből a levezetés-gráf szerint adódnia kellett volna, ill. amely nem azonos az axiómák egyikével sem. Ha valaki elolvasta és megértette pl. a GENTZEN-féle bizonyítást, akkor nemcsak azzal gazdagodott, hogy reprodukálni tudja, hanem azzal a biztonságérzettel is, hogy elsajátított egy ilyen hibamegtaláló eljárást az aritmetikára nézve. Tulajdonképpen minden ellentmondásnélküliségbizonyítást ilyen eljárás megadásának alakjába kellene önteni; hogy ezt nem mindig teszik, annak pusztán az az oka, hogy ilyen alakban sokkal több helyet venne igénybe.

[65] Ha a nagy FERMAT-tétel állítólagos bizonyítását ellenőrizzük, az *első* hibát szoktuk megkeresni. Itt a dolog természetéből folyik, hogy az eljárás az *utolsó* hibát szolgáltatja; hiszen azt kell kihasználni, hogy a levezetések *végén* egymásnak ellentmondó formulák állnak.

Gyakran abban a formában is felvetik a kérdést, hogy egy-egy ellentmondásnélküliség-bizonyítás mit használ fel, mire hivatkozik. A válasz erre: csupa olyan képességet, amelyről mindenki érzi, hogy rendelkezik vele s amelyek egyébként mindenféle matematikai tevékenységhez szükségesek; mint például hogy egy adott, véges számú jelből álló sorozatban (pl. formulában) vagy meg tudom keresni az első olyan jelet, amely egy adott jellel megegyezik (pl. az első kezdőzárójelet), vagy konstatálni tudom, hogy egyáltalában nem fordul benne elő ilyen jel; hogy két ilyen jelsorozatról meg tudom állapítani, része-e egyik a másiknak; hogy egy adott ilyen jelsorozatban tudok valamely jel helyébe, mindenütt, ahol előfordul, egy másik adott jelet vagy jelsorozatot helyettesíteni stb. Ilyen egyszerű képességekre visszavezethetők komplikáltabb tevékenységek is, mint például adott rekurziós egyenletekkel definiált függvénynek numerikusan megadott helyhez tartozó értékének kiszámítása (pl. numerikusan megadott természetes számok összeadása, szorzása); azonban a visszavezetés megint csak meghosszabbítaná az ellentmondásnélküliség bizonyítását; helyette elegendő közvetlenül konstatálnunk, hogy a kérdéses komplikáltabb képességgel is rendelkezünk. Ezenkívül a modell-módszerrel végzett ellentmondásnélküliség-bizonyítások azt is felhasználják, hogy egy bizonyos másik **B** axiómarendszer már ellentmondásnélküli, pontosabban azt, hogy e másik axiómarendszerre nézve már rendelkezünk hibamegtaláló képességgel. A többi módszer nem használ fel ilyenszerű hipotézist; ezeknél tehát nincs értelme annak a kérdésnek, hogy ezek milyen axiómarendszer ellentmondásnélküliségét használják fel. Viszont nem szabad szem elől tévesztenünk azt, hogy a modell-módszer is felhasznál mást is, mint a kérdéses másik **B** axiómarendszer ellentmondásnélküliségét; t. i. azt, hogy rendelkezünk a szótár segítségével való «lefordítás» képességével. A többi módszernél elmarad valamely másik axiómarendszer ellentmondásnélküliségére való hivatkozás, viszont e helyett nagyobb mértékben kell felhasználnunk egyéb képességeink meglételét.

A felemlített ellentmondásnélküliség-bizonyítások közül a GEN-

TZEN-féle hivatkozik a legkomplikáltabb képességre, t. i. arra, hogy ha megértettünk egy eljárást, amely minden adott ε_0 alatti $\alpha > 0$ rendszámhoz egy kisebb β rendszámot rendel és konstatáltuk, hogy rendelkezünk azzal a képességgel, hogy ezt az eljárást adott α esetén mindig végre tudjuk hajtani, akkor adott α-ból kiindulva tudjuk addig iterálni ezt az eljárást, amíg 0-hoz nem jutunk. (A rendszámokat, valamely normálelőállításukat véve alapul, épp úgy véges jelsorozatoknak tekinthetjük, mint a formulákat; egyébként pótolhatnók őket természetes számokkal, csak a «kisebb» reláció helyébe kellene egy másik, tisztán számelméletileg definiálható relációt tennünk, amely a természetes számokat ε_0 típus szerint rendezi.) Ezt a képességet is sikerül, habár komplikált módon, sokkal egyszerűbb képességekre visszavezetni, amelyekről érezzük, hogy rendelkezünk velük.

Más kérdés megint az, hogy milyen axiómarendszerben mondható el egy-egy ellentmondásnélküliség-bizonyítás. Ha a bizonyításelméletet axiomatizáljuk, elvész az eredményeit meggyőzővé tevő képesség-fogalmazás; a felhasznált «alap-képességek» helyébe objektív formába öntött tételek jönnek, mint pl. ha valamely véges jelsorozatban előfordul egy jel, akkor van egy első hely, ahol előfordul; vagy hogy ε_0-nál kisebb rendszámok csökkenő sorozata mindig véges. Mégis fontos módszer a bizonyításelmélet axiomatizálása olyan kérdések vizsgálatánál, hogy be lehet-e egy adott axiómarendszer ellentmondásnélküliségét bizonyítani adott módszerekkel. E téren GÖDEL nagyjelentőségű eredménye [66] azt mondja, hogy egy elég kifejezőképes és elég szabályos **A** axiómarendszer ellentmondásnélkülisége bizonyításához nem elegendők olyan módszerek, amelyek magán az **A** axiómarendszeren belül kifejezhetők. Ez az eredmény, a GENTZEN-féle bizonyításra alkalmazva, többek között azt adja, hogy az ott szereplő rendszám-hozzárendelés nem pótolható véges számoknak (vagy egy ε_0-nál kisebb rendszám alatti transzfinit számoknak) a levezetésekhez való hozzárendelésével. A GENTZEN-féle bizonyítás előtt úgy látszott, hogy GÖDEL tétele egyáltalában lehetetlenné teszi az aritmetika ellentmondás-

[66] L. az 55. lábjegyzetben idézett munkát.

nélküliségének bizonyítását. Ma is sokan kételkednek a GENTZEN-féle módszernek az analízisre való kiterjeszthetőségében arra hivatkozva, hogy a második számosztály elmélete felépíthető az analízis axiómarendszere segítségével. A helyzet azonban az, hogy nem várható, hogy az analízis, vagy akár a halmazelmélet axiómarendszere segítségével a természetes számok minden egyes speciális (esetleg komplikált számelméleti utasításokkal megadott) jólrendezéséről meg lehessen mutatni, hogy valóban jólrendezés; az természetesen kérdéses, hogy egy olyan jólrendezésre vonatkozólag, amelyről ezt nem lehet megmutatni, sikerül-e bennünket valami módon meggyőzni, hogy rendelkezünk a megfelelő «végigiterálási» képességgel. A GÖDEL-féle tétellel kapcsolatos gondolatkörrel azonban nem foglalkozhatom részletesebben.[67]

Ha a GENTZEN-féle ellentmondásnélküliség-bizonyítást axiomatizáljuk, az az axióma, amely túllép az aritmetika axiómarendszerén, az ε_0-típusú transzfinit indukció axiómája lesz. Viszont az aritmetika axiómáit és következtetésmódjait nem használjuk ki teljesen. Ez különösen a logikai axiómákra és következtetési szabályokra vonatkozik. Ugyanis az ellentmondásnélküliség-bizonyítás minden egyes lépése egy-egy képességünket tárja fel; már pedig nem minden logikai tételnek (identitásnak) felel meg képesség s nem minden következtetésmódnak az, hogy bizonyos képességek másokat involválnak. Például a harmadik kizárása elvének az a képesség felelne meg, hogy bármely feladatot vagy meg tudunk oldani, vagy meg tudjuk mutatni, hogy képtelenség, hogy valaki megoldotta; már pedig ezzel a képességgel nyilván nem rendelkezünk általánosan.

Felvethető viszont a fordított kérdés is: ha a bizonyításelmélet eredményei azért meggyőzőek, mert közvetlenül konstatált meglevő képességeinkre hivatkozó meggondolások eredményezték azokat, nem lehet-e a matematika más ágainak is hasonló meggyőző

[67] E kérdésekről dr. PÉTER RÓZSA tartott 1940. március 8-án előadást az Elméleti Fizikai Intézet kollokviumán; előadása a *Mat. és Fiz. Lapok* ugyane füzetében jelenik meg, közvetlenül e dolgozat után (120—143. oldal).

erőt kölcsönözni azáltal, hogy tételeit olyan formába öntjük, hogy mindegyik egy-egy képességünk meglételét fejezze ki. Ez a programm a már említett, KRONECKERre visszavezethető, BROUWER által kiépített *intuicionizmus* programmja. Természetes, hogy ha ez a képesség-fogalmazás már a logikában sem sikerült minden tételnél, még kevésbbé sikerülhet a matematikában. A numerikus számtan terén még maradék nélkül sikerül ez az átfogalmazás; például annak intuicionista bizonyítása, hogy 2.2=4, egy olyan képesség közlésében áll, amellyel, valahányszor valaki megad nekünk két kételemű és egy négyelemű halmazt, az előbbiek elemeiből alkotott rendezett párokat az utóbbinak elemeihez kölcsönösen egyértelműen hozzá tudjuk rendelni. De az egész számok általános aritmetikájában sem lépnek fel lényeges nehézségek; mindössze néhány bizonyításmódot kell elkerülnünk, például két szám, a és b, legnagyobb közös osztója létezésének azt a bizonyítását, amely ezt a legnagyobb közös osztót mint a legkisebb $ax+by$ alakú pozitív számot adja meg, mert az a képességünk nincs meg általában, hogy végtelen sok természetes szám közül megkeressük a legkisebbet (ezzel szemben az euklidesi algoritmussal való bizonyítás csupa olyan képességre hivatkozik, amellyel valóban rendelkezünk). Már a valós számok aritmetikájában, méginkább az analízisben és a halmazelméletben, több nehézséget okoz az intuicionista átfogalmazás; így pl. nincs meg az a képességünk, amivel két tetszőleges (pl. racionális intervallumok szűkülő sorozatával megadott) valós számról eldöntsük, hogy melyik a nagyobb; ennélfogva az intuicionisták nem fogadják el azt a tételt, hogy két különböző valós szám közül az egyik nagyobb a másiknál. Hasonlóan elvetik többek között a korlátos számhalmazok felső határának létezéséről, folytonos függvény maximumának eléréséről szóló tételeket. Az intuicionista analízis és halmazelmélet e szerint szegényebb, mint a klasszikus;[68] egyben lényege-

[68] Ezt nem úgy kell értenünk, hogy az intuicionista analízis minden tétele a klasszikus analízisben is előfordul, viszont azonban nem; csak úgy, hogy a klasszikus analízis tételeinek nagy része nem fordul elő az intuicionista analízis tételei között. Ugyanis vannak olyan intuicionista

sen komplikáltabb annál, pl. a megszámlálható halmaz fogalma helyébe nyolc különböző fogalmat tesz annak megfelelően, hogy a természetes számok halmazára való kölcsönösen egyértelmű leképezés képessége helyett ennek mely, ezt a klasszikus halmazelmélet szempontjából pótoló részképességével rendelkezünk (pl. a természetes számok halmazának egy végtelen részére való kölcsönösen egyértelmű leképezés képességével). A logikának — a mellett, hogy egyes tételeit, mint pl. a harmadik kizárása elvét, elvetik az intuicionisták — érdekes módon alárendelt szerepe van az intuicionista matematikában. Ugyanis minden egyes képesség esetén közvetlenül be kell, hogy láthassuk azt, hogy rendelkezünk vele, a nélkül, hogy egyszerűbb képességekre visszavezetnők; már pedig a logika az intuicionisták szemében pusztán ezt a visszavezetést szolgálja s így a képesség bírásáról való meggyőződést megkönnyítő, azonban elvileg nélkülözhető segédeszköz.

Az intuicionizmus ismertetése azonban nem feladatom;[69] ennyire is csak a bizonyításelmélettel való kapcsolatai miatt mentem bele. Az intuicionizmus és a bizonyításelmélet még egy évtizede két, egymással élesen szembenálló filozófiai felfogás termé-

---

tételek, amelyek a klasszikus analízisben nem igazak; pl. hogy egy valamely zárt intervallum minden helyén értelmezett függvény egyenletesen folytonos az intervallumban. Hogy ilyen tételek adódhatnak az intuicionista matematikában, annak az az oka, hogy a tétel feltételei itt sokkal többet kívánnak, mint a klasszikus analízisben; pl. az intuicionista felfogás szerint csak akkor mondjuk, hogy egy függvény értelmezve van egy intervallum minden helyén, ha rendelkezünk egy eljárással, amelynek birtokában, ha valaki szukcesszíve mind pontosabban és pontosabban megadja a független változó értékét, mi szukcesszíve mind pontosabban meg tudjuk adni a függvényértéket, a nélkül, hogy ehhez végig kellene várnunk a független változó megadásának egész végtelen processzusát, ami lehetetlenséget kívánna tőlünk; már pedig ilyen eljárás nyilván csak folytonos függvények esetén lehetséges.

[69] Kitűnő összefoglalása az intuicionizmusnak (s egyben a bizonyításelmélet alapgondolatainak is): A. HEYTING, Mathematische Grundlagenforschung, *Ergebnisse der Math.*, **3** (1934), *375—449.* oldal. A bizonyításelmélet részletesebb tanulmányozására a 19. lábjegyzetben idézett HILBERT—BERNAYS-féle mű (II. kötetével : Berlin, 1939, együtt) ajánlható.

kének látszott; megalkotóik, Brouwer és Hilbert, heves vitákat vívtak. Azonban e viták a gondolatok tisztázásához vezettek; kiderült, hogy okuk nagyrészt az volt, hogy ugyanazokon a szavakon mást-mást értettek, kiki a maga programmjába illő dolgot; kiderült, hogy a bizonyításelmélet és az intuicionizmus két különböző, egymást kiegészítő feladatkört tölt be. Ma már a köztük levő nézeteltérés egy-két prioritási kérdéstől eltekintve arra szorítkozik, hogy az intuicionizmus által elvetett, de a bizonyításelmélet által ellentmondásnélkülinek talált (vagy találandó) diszciplinák Brouwer szerint jelentésnélküli formulákkal való játékok, míg Hilbert kezdettől fogva meg volt győződve arról, hogy minden matematikai fogalomnak és tételnek van jelentéstartalma, ha nem is képességünkre vonatkozik.

Kalmár László.

ZIELSETZUNGEN, METHODEN UND ERGEBNISSE DER HILBERTSCHEN BEWEISTHEORIE.*

Die sprichwörtliche Unfehlbarkeit der Mathematik wurde zuerst durch jene Fehlschlüsse erschüttert, zu denen die Infinitesimalmethoden Anlaß gaben. Durch die exakte Begründung der Analysis durch Cauchy und Weierstrasz wurde die Möglichkeit solcher Fehlschlüsse eliminiert; doch ergab sich durch die Entdeckung der Antinomien der Mengenlehre wiederum eine ähnliche Lage. Da die Methoden der Mengenlehre auch für die übrige Mathematik unentbehrlich sind, ergibt sich die Notwendigkeit einer Neubegründung der Mathematik nebst exaktem Beweis der Widerspruchsfreiheit ihrer verschiedenen Zweige, wie Arithmetik, Analysis, Mengenlehre, Geometrie usw. Dies ist der Hauptzweck der Hilbertschen Beweistheorie. Dazu sind zunächst Begriffe, wie Widerspruchsfreiheit, Arithmetik usw. exakt zu fassen. Zu diesem Zwecke stützt sich die Beweistheorie auf die Ergebnisse der Axiomatik und der mathematischen Logik.

---

* Ausarbeitung des zweiten Teiles eines Vortrags gehalten am 3. November 1939. im Kolloquium des Instituts für Theoretische Physik der Universität zu Budapest. Der erste Teil — eine Übersicht über die Elemente der Mengenlehre — wurde hier weggelassen.

Die axiomatische Methode besteht in einer bewußten Grenzsetzung des Definierens und Beweisens, indem gewisse Sätze einer Theorie als Axiome, die darin vorkommenden Begriffe als Grundbegriffe erklärt werden und sämtliche weitere Begriffe der Theorie durch jene definiert, sämtliche weitere Sätze durch die Axiome bewiesen werden. Durch Angabe eines Axiomensystems kann ein Zweig der Mathematik exakt abgegrenzt werden.

Die Zweige der mathematischen Logik, die für die Beweistheorie in erster Linie in Betracht kommen, sind der Aussagenkalkül und der engere Funktionenkalkül. Ersterer behandelt Funktionen, deren Argumente und Werte die beiden logischen Werte «wahr» und «falsch» durchlaufen; letzterer aber Funktionen über einer beliebigen Menge (Individuenbereich), die logische Werte als Funktionswerte annehmen. Die «Quantoren» *alle* und *es gibt* sind spezielle Funktionaloperationen über solche Funktionen; sie spielen eine ähnliche Rolle, wie die Integration in der Analysis.

Mit Hilfe dieser Methoden ist es möglich, eine exakte Definition des für die Axiomatik grundlegenden Begriffes «aus gewissen Prämissen folgt ein gewisser Satz» zu geben, die zugleich den herkömmlichen Inhalt dieses Begriffes deckt. Der Mengenbegriff, der zunächst durch den Funktionenkalkül in diese Definition einspielt und scheinbar unentbehrlich ist, läßt sich mit Hilfe des sogenannten GÖDELschen Vollständigkeitssatzes eliminieren.

Mittels des Begriffs der Folgerung lassen sich Begriffe, wie Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit usw. ohne weiteres scharf fassen; damit ist der erste, grundlegende, Schritt gegen dem gesetzten Ziel der Beweistheorie getan.

Zum Beweise der Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems verfügt die Beweistheorie über verschiedene Methoden. Die älteste Methode ist die des *Konstruierens eines Modells* für das betrachtete Axiomensystem innerhalb eines anderen; diese Methode kann nur relative Widerspruchsfreiheit (d. h. unter Voraussetzung der Widerspruchsfreiheit eines anderen Axiomensystems) liefern. Außer den klassischen Anwendungen dieser Methode (Zurückführung der Widerspruchsfreiheit der BOLYAIschen Geometrie auf die der EUKLIDischen; Zurückführung der Widerspruchsfreiheit der Geometrie auf die der Analysis) kann man die GÖDELsche Entdeckung aufführen: Widerspruchsfreiheit der durch Auswahlaxiom und verallgemeinertem Kontinuumsatz erweiterten Mengenlehre unter Voraussetzung der Widerspruchsfreiheit der Mengenlehre ohne diese.

Die einfachste Methode, die einen absoluten Widerspruchsfreiheitssatz liefern kann, die *Wertungsmethode* geht auf J. KŐNIG zurück. Sie besteht in einer Zuordnung von logischen Werten den Aussagen (Formeln) des Axiomensystems, die den Axiomen den Wert «wahr» zuordnet, desgleichen den Folgerungen aus Sätzen, denen bereits «wahr» zugeordnet wurde, während einander widersprechenden Aussagen nie gleichzeitig den Wert «wahr» zuordnet. Diese Methode wurde von J. KŐNIG auf ein Bruchstück der Arithmetik angewendet; weitere Bruchstücke der Arithmetik wurden durch dieselbe Methode, kombiniert mit einer Elimination der Quantoren mittels «*Ausintegrieren*», von HERBRAND und PRESBURGER behandelt. Ein anderes Hilfsmittel zur Elimination der Quantoren wird durch den HILBERTschen ε-Symbol geliefert; um aber eine Wertung angeben zu können, bedarf man einer Methode zur *Elimination* des ε-Symbols, was ebenfalls nur bei sehr einfachen Axiomensystemen, in erster Linie bei Bruchstücken der Arithmetik, ausgeführt werden kann.

Eine Erweiterung der Wertungsmethode wurde — nachdem diese Erweiterung von HILBERT und ACKERMANN in einer anderen Form bereits angewandt wurde — von J. v. NEUMANN formuliert. Die erweiterte, sogenannte *Teilwertungsmethode* erfordert statt einer festen Zuordnung von logischen Werten den Aussagen eine Anweisung, die nach Angabe eines Beweises (von dem es zu zeigen ist, daß er nicht zu einem Widerspruch führt) eine solche, vom betrachteten Beweis abhängige, Zuordnung für die im Beweise vorkommenden Formeln definiert. Durch diese Methode wurde die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik unter gewissen Einschränkungen betreffend der Verwendung der vollständigen Induktion von NEUMANN, ACKERMANN und HERBRAND bewiesen.

Die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik ohne irgendwelche Einschränkungen wurde zuerst von GENTZEN (dann aber auch von ACKERMANN mittels älteren HILBERTschen Ansätzen, die auf die Teilwertungsmethode hinauskommen) bewiesen. GENTZENS Methode beruht auf einer speziellen *Beweistransformation*, die einem jeden Beweis der Arithmetik mit einer numerischen Gleichung als Resultat, falls er nicht genügend einfach ist um eine direkte Anwendung der Wertungsmethode zuzulassen, einen in gewisser Hinsicht einfacheren Beweis derselben numerischen Gleichung zuordnet. Die Vereinfachung besteht entweder in einer «Auflösung» einer vollständigen Induktion, oder in einer Fallunterscheidung, die eine Vereinfachung in Schlüssen im Zusammenhang mit Quantoren bewirkt. Daß wirklich eine Vereinfachung vorliegt, zeigt sich durch eine geeignete Zuordnung von transfiniten Ordnungszahlen (unterhalb der ersten ε-Zahl), als «Kompliziertheitsgraden» zu den Beweisen, indem nämlich bei der fraglichen Beweistransformation der Kompliziertheitsgrad abnimmt. Durch einen transfiniten Induktionsschluß ergibt sich die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik. Die Ausdehnung der GENTZENschen Methode auf die Analysis scheint nicht unmöglich, aber mit fast unüberwindbaren technischen Schwierigkeiten behaftet zu sein.

Die Frage, was man durch einen Widerspruchsfreiheitsbeweis gewinnt, läßt sich dahin beantworten, daß man dadurch eine Fähigkeit erwirbt, in einem beliebig vorgelegten Scheinbeweis, der sich angeblich im betrachteten Axiomensystem abspielt und zu einem Widerspruch führt, einen Fehler aufzudecken. Dabei werden einfachere Fähigkeiten vorausgesetzt, deren Bestehen man unmittelbar fühlt. Es ist zwar möglich, den Widerspruchsfreiheitsbeweis so umzugestalten, daß man sich statt Fähigkeiten auf Axiomen von «objektiverem» Inhalt beruft; doch bedarf man dann, nach einem GÖDELschen Satz, eines gegenüber dem betrachteten *weiteren* Axiomensystems. Andererseits kann man versuchen, die ganze Mathematik in Behauptungen über das Bestehen von Fähigkeiten umzugestalten; dies ist die Tendenz des Intuitionismus und führt notwendig zu einer Verstümmelung der klassischen Mathematik, da nicht allen Sätzen derselben Fähigkeiten entsprechen, die wir wirklich besitzen.

László Kalmár.