KURT GÖDEL

NÉHÁNY TÉTEL A MATEMATIKA MEGALAPOZÁSÁRÓL ÉS EZEK KÖVETKEZMÉNYEI*

Az utóbbi néhány évtizedben a matematika alapjaira vonatkozó kutatások eredményekhez vezettek, amelyek véleményem szerint nem csupán önmaguk okán érdemelnek figyelmet, de ugyanilyen fontos következményeik vannak a matematika természetét firtató hagyományos filozófiai kérdések szempontjából is. Ezen eredmények meggyőződésem szerint elég széles körben ismertek ugyan, mégis szükségesnek tartom, hogy – nagy vonalakban legalább – bemutassam őket, a tételek jelenlegi formája ugyanis – különböző matematikusok munkája nyomán – eredeti változataikénál sokkal inkább kielégítő. A legnagyobb előrelépés e téren a véges eljárás[1] fogalmának – amely a szóban forgó eredményekben döntő szerepet játszik – a precíz definíciója volt. E definíció többféle módon is megközelíthető, a különféle megközelítések azonban egytől egyig pontosan ugyanahhoz a fogalomhoz vezetnek. A leginkább kielégítő megoldás véleményem szerint az angol Turingé, aki a véges eljárás fogalmát a véges számú alkatrészből álló gép fogalmára vezette vissza. A tételek filozófiai következményei alkalmanként szóba kerültek ugyan, alapos vizsgálat alá azonban mind ez idáig nem vetették azokat.

*Gödel 1951-es Gibbs-előadásának anyaga. Első megjelenése: *Collected Works, Vol. III*, szerk. S. Feferman et al., Oxford, 1995, Oxford University Press, 304–323. p. A fordítást az Institute for Advanced Study (Princeton) szíves engedélyével közöljük. A szerkesztői megjegyzések egy részét elhagytuk.

[1] A véges eljárás fogalmát ebben az előadásban ekvivalensnek tekintem a természetes számokon értelmezett kiszámítható függvény fogalmával (olyan f függvényével tehát, amelynek definíciója alapján az $f(n)$ függvényérték tetszőleges n szám esetén ténylegesen kiszámítható). A szóba kerülő eljárásokat ugyan nem számokra, hanem formulákra kell alkalmaznunk, ezek azonban a formulák felsorolhatósága alapján mindig visszavezethetők számokon végrehajtandó eljárásokra.

A szóban forgó metamatematikai eredmények mind ugyanazt az alapvető tényállást járják körül, különböző aspektusait megjelenítve: e tényállást a matematika befejezhetetlenségének vagy kimeríthetetlenségének nevezhetnénk. Legegyszerűbb megnyilvánulásával az axiomatikus módszer alkalmazása során találkozunk, méghozzá nem a geometriához hasonló hipotetikus-deduktív rendszerek esetében (ahol a matematikus csupán feltételes igazságot tulajdoníthat tételeinek), hanem amikor e módszert a valódi értelemben vett matematikára, vagyis az abszolút érvényű, semmilyen további feltevéstől nem függő matematikai állítások körére alkalmazzuk. Példának okáért *némely*

ha ezt és ezt az axiómát feltesszük,
akkor ez és ez a tétel fennáll

alakú kondicionális szükségképpen igaz kell hogy legyen valamiféle abszolút értelemben is. Minden bizonnyal ugyanilyen típusú a finit számelmélet valamennyi tétele, például a $2+2=4$ állítás is. A valódi matematika axiomatizálásának feladata nyilvánvalóan nem felel meg az axiomatizálás szokásos felfogásának: az axiómák ugyanis nem lehetnek tetszőlegesek – korrekt, bizonyítás nélkül is evidens matematikai állításoknak kell lenniük. Mivel a bizonyításokhoz kiindulópontra van szükség, nem áll módunkban megkerülni annak szükségességét, hogy néhány axiómát vagy levezetési szabályt bizonyítás nélkül elfogadjunk. Az arra vonatkozó vélemények azonban, hogy a – fenti értelemben vett – valódi matematika az állítások mekkora körét öleli fel, meglehetősen eltérőek. Az intuicionisták és a finitisták például elutasítanak bizonyos, mások által elfogadott axiómákat és fogalmakat is, mint amilyen a kizárt harmadik törvénye vagy a halmaz általános fogalma.

A matematika[2] kimeríthetetlenségével azonban valamilyen formában mindig találkozunk, függetlenül attól, hogy melyik álláspontot tesszük magunkévá. Ennélfogva bemutatha-

[2] A 'matematika' kifejezés most és az elkövetkezőkben mindvégig a „valódi értelemben vett matematikát" jelöli (ami természetesen magában foglalja a formális logika mindazon elemeit is, amelyek az adott álláspont szerint helyesnek fogadandók el).

tom akár úgy is, hogy a legegyszerűbb és legtermészetesebb nézőpontot veszem alapul, amely a matematikát úgy tekinti adottnak, ahogy van, anélkül, hogy valamiféle kritika alapján megrövidítené. Ebből a felfogásból arra jutunk, hogy a matematika az absztrakt halmazelméletre vezethető vissza. Az például, hogy a projektív geometria axiómáiból egy adott tétel következik, eszerint a következőt jelenti: amennyiben egy M halmaz, amelynek az elemeit pontoknak, s részhalmazainak egy N részhalmaza, amelynek elemeit egyeneseknek nevezzük, kielégíti a szóban forgó axiómákat, akkor M-re és N-re a tétel állítása teljesül. A számelmélet tételeit ugyanígy véges halmazokra vonatkozó állításokként értelmezhetjük. A probléma tehát, amellyel szembekerülünk, a halmazelmélet axiomatizálása. Ha azonban szemügyre vesszük a megoldást, úgy találjuk, hogy az eredmény szöges ellentétben áll a várakozásokkal. Ahelyett, hogy – miként a geometriában – véges számú axióma is elegendőnek bizonyulna, axiómák végtelen sorával szembesülünk, amely sor tovább és tovább folytatható, méghozzá – látszólag legalábbis – anélkül, hogy a legcsekélyebb lehetőség is mutatkozna arra, hogy axiómáinkat egyetlen véges generáló szabály segítségével összefoghassuk.[3] Mindez annak következménye, hogy amennyiben a halmazelmélet paradoxonjait oly módon akarjuk elkerülni, hogy a matematikába semmiféle teljesen idegen, külső korlátozást nem akarunk bevezetni, úgy a halmazfogalom csak lépésről lépésre haladva axiomatizálható.[4] Ha például a természetes számokból, vagyis bizonyos típusú véges halmazokból indulunk ki, akkor elsőként a természetes számokból álló halmazokat kapjuk meg, a rájuk vonatkozó – első szintű – axiómákkal együtt, ezután következnek a természetes számok halmazaiból álló halmazok, a rájuk vonatkozó – második szintű – axiómákkal, s így

[3] A fizikai geometria és hasonló nem-matematikai diszciplínák axiomatizálásakor a valódi értelemben vett matematikát előfeltételezzük; az axiomatizálás a szóban forgó tárgykör tartalmára csak annyiban támaszkodik, amennyiben túlmegy a valódi értelemben vett matematikán. Ez a tartalom viszont, legalábbis az eddig megvizsgált esetekben, véges számú axiómával is megragadható.

[4] Ez a körülmény az axiómák szokásos alakjából közvetlenül nem nyilvánvaló, csak jelentésük tüzetesebb vizsgálata alapján.

tovább, az „a … -k halmaza" művelet tetszőleges véges sokszori iterációjával.[5] Ezután következik az összes ilyen – tehát véges számú lépésben elérhető – halmaz halmaza. Ezt azonban most éppúgy kiindulópontnak tekinthetjük, mint megelőzőleg a természetes számokat, vehetjük tehát ezen halmaz részhalmazait (az ω-szintű halmazokat), s megfogalmazhatjuk a létezésükre vonatkozó axiómákat. Az eljárás nyilván ω-n túl is folytatható, ténylegesen bármely végtelen rendszámig. Megkövetelhetjük tehát egy újabb axióma útján, hogy az iteráció tetszőleges rendszám, azaz tetszőleges jólrendezett halmaz rendtípusa esetén lehetséges legyen. S ezzel talán végeztünk is? Semmi esetre sem. Hiszen most értelmezhetünk egy új halmazokat képző műveletet: tetszőleges A halmaz és egy B jólrendezett halmaz esetén, tekintsük azt a halmazt, amelyet A-ból nyerünk a hatványhalmazképzés annyiszoros alkalmazásával, ahányat a jólrendezett B halmaz előír.[6] Ha ezután B-t az A valamely jólrendezésével azonosítjuk, az így kapott műveletet megint iterálhatjuk, méghozzá újfent egészen a végtelenig. Ezzel megint lehetőség nyílik egy újabb művelet értelmezésére, amellyel aztán mindent elölről kezdhetünk – s így tovább. A következő lépés az lesz, hogy megköveteljük: tetszőleges halmazokból halmazokat generáló művelet iterálható legyen tetszőleges rendszámig. S ezzel talán végeztünk is? Nem, hiszen nemcsak azt követelhetjük meg, hogy az imént leírt eljárást tetszőleges művelet esetén végrehajtható legyen, de ezen felül azt is, hogy létezzen olyan halmaz, amely zárt a szóban forgó eljárásra vonatkozóan, azaz amelynek elemeire a fenti eljárást alkalmazva (bármely műveletről legyen is szó) eredményül újra csak az illető halmaz elemeit kapjuk. Úgy gondolom, mindenki előtt nyilvánvaló, hogy ezzel még mindig nem jártunk a dolog végére, miképp az is, hogy az újabb és

[5] Az „a … -k halmaza" operáció lényegében nem különbözik a hatványhalmaz-operációtól; az M halmaz hatványhalmaza definíció szerint M összes részhalmazának halmaza.

[6] Feltehetjük, hogy $A = B$, továbbá azt is, hogy minden halmazhoz hozzárendeltünk egy meghatározott jólrendezést. A másodfajú rendszámok (limeszrendszámok) esetén mindig a megelőzőleg létrejött halmazok unióját kell venni.

újabb axiómák megfogalmazásának ez a folyamata nem is érhet véget, hiszen magának az axiómaképzésnek a menetéből következik, hogy egy adott pont elérésekor ki kell mondani a következő axiómát. Igaz ugyan, hogy az imént bemutatott hierarchia felsőbb szintjeinek a mai matematika gyakorlatilag sohasem veszi hasznát. Bizton állíthatjuk, hogy napjaink matematikájának 99, 9%-a benne foglaltatik e hierarchia első három szintjében. Ha tehát a gyakorlat igényeit tartjuk szem előtt, akkor a matematika egésze *valóban* visszavezethető véges számú axiómára. Ez azonban puszta történeti véletlen, amelynek az általunk fölvetett elvi kérdés szempontjából semmiféle jelentősége nincs. S ehhez hozzátehetjük: nem teljesen valószínűtlen, hogy napjaink matematikájának ez a vonása azzal is kapcsolatba hozható, hogy bizonyos problémákat, mint amilyen például a Riemann-hipotézis, a sok éven át tartó próbálkozások ellenére sem sikerült megoldani. Bizonyítható ugyanis, hogy a magasabb szintekre vonatkozó axiómák nem csupán ezen szintek szempontjából relevánsak, de következményekkel járnak a legalsó szintre, tehát a természetes számok elméletére vonatkozóan is. Pontosabban, valamennyi halmazelméleti axióma maga után vonja olyan diofantikus problémák megoldását, amelyek a megelőző axiómák alapján még eldönthetetlenek voltak.[7] *A szóban forgó diofantikus problémák a következőképpen jellemezhetők: Legyen* $P(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ $n + m$ *változós, egész együtthatós polinom; tekintsük az* x_i *változókat ismeretleneknek, az* y_i*-ket pedig paramétereknek; a kérdés ezek után így szól: van-e a* $P = 0$ *egyenletnek a paraméterek tetszőleges egész*

[7] Ahhoz, hogy a tétel az intuicionista vagy a finitista matematikában is érvényes legyen, a feltételek közé a halmazelmélet axiómáinak konzisztenciáját is fel kell vennünk, ami természetesen önmagában evidens (s így hipotézisként való szerepeltetésétől el is tekinthetünk), amennyiben a halmazelméletet valódi értelemben vett matematikának tekintjük. Azonban a finitista matematikában is érvényes egy hasonló tétel, méghozzá a konzisztencia (megkérdőjelezhető) feltevése nélkül: eszerint az egyre magasabb rendű rekurzív függvények bevezetése újabb és újabb – a fenti típusba tartozó – számelméleti problémák megoldásához vezet. Az intuicionista matematikában kétségtelenül érvényes egy hasonló tétel, amelyben a második számosztályba tartozó egyre nagyobb rendszámok – újabb és újabb axiómák alapján való – bevezetése játszik döntő szerepet.

értéke esetén megoldása az egész számok körében, vagy vannak-e a paramétereknek olyan értékei, amelyek mellett az egyenlet nem oldható meg? A halmazelméleti axiómák mindegyikéhez megadható egy fenti típusú polinom, amelyre vonatkozóan a megoldhatóság kérdése éppen az illető axióma alapján válik eldönthetővé. Mindig elérhető továbbá, hogy az illető polinom fokszáma ne legyen 4-nél nagyobb. A mai matematika még nem tanulta meg, miként használhatná a halmazelméleti axiómákat számelméleti problémák megoldására – az első szintre vonatkozó axiómák kivételével, ezeket ugyanis az analitikus számelméletben ténylegesen alkalmazzák. A számelmélet műveléséhez azonban ennyi bizonyíthatóan nem elegendő. Valamiféle halmazelméleti számelmélet, amelynek felfedezése egyelőre várat magára, minden bizonnyal messzebbre jutna.

A matematika kimeríthetetlenségének nevezett tényállást a matematika megalapozásának egyik lehetséges megközelítéséhez, az axiomatikus halmazelmélethez kapcsolódva próbáltam megvilágítani. Bizonyos igen általános tételek alapján azonban úgy tűnik, e tény teljes mértékben független attól, hogy melyik megközelítést is választjuk. E tételek közül az első egyszerűen azt állítja, hogy *axiómák és következtetési szabályok tetszőleges jól definiált rendszerében mindig léteznek olyan – fent leírt típusú – diofantikus problémák, amelyek az illető axiómák és szabályok alapján nem dönthetők el, csupán annyit kell feltennünk, hogy a rendszerben egyetlen ilyen típusú hamis állítás sem vezethető le.*[8] Amikor axiómák és következtetési szabályok jól definiált rendszeréről beszélek, ez csupán azt a követelményt jelenti, hogy minden axiómát ténylegesen le lehessen írni egy adott precíz formalizmusban, vagy amennyiben számuk végtelen, rendelkezésünkre kell hogy álljon egy véges eljárás, amellyel egyik a másik után leírható. Hasonlóképpen a következtetési szabályoknak mind olyanoknak kell lenniük, hogy tetszőleges premisszákat véve ténylegesen leírható le-

[8] Ez a hipotézis, mint [Rosser 1936] megmutatta, helyettesíthető a konzisztencia feltételezésével, de úgy az eldönthetetlen formulák szerkezete kissé bonyolultabbá válik. Fel kell tennünk továbbá, hogy az összeadás, a szorzás és a $<$ alapvető tulajdonságai következnek az axiómákból.

gyen a konklúzió (melyhez valamelyik szabály vezet), vagy pedig meg lehessen győződni arról, hogy az illető szabály nem vezet semmilyen közvetlen következményhez. A szabályokra és az axiómákra vonatkozó fenti követelmények ekvivalensek azzal, hogy meg tudunk konstruálni egy – a Turing által definiált értelemben vett – véges gépet, amely az axiómák valamennyi következményét sorra leírja. Következésképp a szóban forgó tétel ekvivalens azzal, hogy a fenti típusú diofantikus problémák szisztematikus eldöntésére nem létezik véges eljárás.

A második tétel az ellentmondásmentesség fogalmával áll összefüggésben. Axiómák és szabályok egy jól definiált rendszerében a rendszer konzisztenciájának kérdése maga is nyilvánvalóan jól definiált, matematikai kérdés. Mi több, mivel bármely formalizmus szimbólumai és állításai – legalábbis – felsorolhatók, vagyis leképezhetők a természetes számok halmazára, plauzibilisnek tűnik, s ténylegesen bizonyítható is, hogy a konzisztencia kérdése mindig lefordítható egy aritmetikai kérdéssé (pontosabban egy fent leírt formájú diofantikus problémává). A tétel mármost azt mondja ki, hogy *axiómák és szabályok bármely jól definiált rendszerében a rendszer konzisztenciáját kimondó állítás (pontosabban annak aritmetikai megfelelője) a szóban forgó axiómák és szabályok alapján nem bizonyítható,*[9] *feltéve, hogy azok elegendőek a pozitív egész számok finit aritmetikája bizonyos részének levezetéséhez.*[10] S ez a tétel az, amely a matematika befejezhetetlenségét különösképpen nyilvánvalóvá teszi. *A tétel fényében ugyanis lehetetlen, hogy valaki axiómák és szabályok egy jól definiált rendszerére rámutatva konzisztens módon a következőt állítsa: mindezen axiómákat és szabályokat (matematikai bizonyossággal) helyesnek tartom, s meggyőződésem szerint az egész matematikát magukba foglalják.* Ha valaki ezt állítja, saját magának mond ellent.[11] Ha ugyanis valamennyi axiómát he-

[9] Az eldönthetetlen állítások közé tartozik, ha feltesszük, hogy a rendszerben egyetlen hamis számelméleti állítás sem vezethető le (lásd az előző tételt).

[10] Közelebbről Peano axiómáinak és a rekurzív definíció szabályának levezethetősége szükséges, a legszigorúbb finitista követelményeknek is eleget tevő logikával.

[11] Ha csupán annyit állít: „Meg vagyok győződve arról, hogy képes leszek

lyesnek tartja, akkor (ugyanazzal a bizonyossággal) arról is meg lehet győződve, hogy a rendszer konzisztens. Olyan matematikai belátással rendelkezik tehát, amely az axiómákból nem vezethető le. A helyzet alapos mérlegeléséhez azonban elkél némi óvatosság. Arról lenne szó, hogy a valódi matematika egészét egyetlen jól definiált axiómarendszer sem foglalhatja magában? Igen, amennyiben valódi matematikán az igaz matematikai állítások összességét értjük – ha azonban valódi matematikán a bizonyítható állítások rendszerét értjük, akkor a válasz nemleges. A matematika e két értelmezését objektív és szubjektív értelemben vett matematikaként különböztetem meg. Nyilvánvaló, hogy az objektív matematika egészét jól definiált axiómák egyetlen rendszerével sem tudjuk kimeríteni, hiszen a rendszer konzisztenciáját kimondó állítás igaz, a rendszerben azonban nem bizonyítható. Ami viszont a szubjektív értelemben vett matematikát illeti, nem kizárt, hogy létezik olyan finit szabály, amely e matematika valamennyi evidens axiómáját generálja. De ha létezik is ilyen szabály, emberi értelmi képességeink alapján sohasem tudhatnánk, hogy valóban ilyen, azaz sohasem tudhatnánk matematikai bizonyossággal, hogy a szabály által generált valamennyi állítás helyes,[12] más szóval csupán arra lennénk képesek, hogy egymás után meggyőződjünk tetszőleges (véges) számú állítás igazságáról. Azt viszont, hogy ezen állítások mindegyike igaz, legfeljebb empirikus bizonyossággal tekinthetnénk ismertnek, elégséges számú igazoló eset vagy más induktív következtetés alapján.[13] Ez annyit jelentene, hogy az emberi elme (a

---

sorra mindegyikről megállapítani, igaz-e vagy sem" – a szóban forgó állítások száma ez esetben nyilván végtelen –, akkor nem mond ellent önmagának (lásd még alább).

[12] Ezen állítás (vagy az axiómák konzisztenciájára vonatkozó következménye) ugyanis olyan matematikai belátáshoz vezetne, amely – a feltevéssel ellentétben – az axiómák és a szabályok alapján nem vezethető le.

[13] Elképzelhető például (bár a feltételezés napjaink tudományának határain messze kívülre esik), hogy az agy fiziológiájának kutatása oly mértékben előrehalad, hogy empirikus bizonyossággal tudni lehet majd, hogy

1. az agy elégséges valamennyi mentális jelenség magyarázatához, s egy Turing szerinti értelemben vett gépnek tekinthető;

tiszta matematika vonatkozásában) egy véges géppel ekvivalens, amely gép azonban saját működését nem képes tökéletesen megismerni.[14] Az önmaga megértésére való képtelenség az ember előtt ekkor – helytelenül – úgy jelenne meg, mint az elme határtalansága és kimeríthetetlensége. Vegyük azonban észre, hogy ha így állna is a dolog, az semmilyen módon nem változtatna az objektív matematika befejezhetetlenségének tényén. Éppen ellenkezőleg, e tény még sokkal szembeszökőbbé válna. Amennyiben ugyanis az emberi elme egy véges géppel volna ekvivalens, úgy az objektív matematika nem csupán abban az értelemben lenne befejezhetetlen, hogy egyetlen jól definiált axiomatikus rendszer sem tudja megragadni, de léteznének *abszolút értelemben* eldönthetetlen – a fent megadott típusba sorolható – diofantikus problémák is; az 'abszolút értelemben' kitételt e helyütt úgy értve, hogy ezen állítások nem csupán egy adott axiomatikus rendszer keretei között eldönthetetlenek, de eldöntésükhöz *bármely*, az emberi elme által felfogható bizonyítás elégtelen. Nem kerülhető el tehát a következő diszjunktív konklúzió: *A matematika vagy lényege szerint befejezhetetlen, abban az értelemben, hogy evidens axiómái soha nem foglalhatók össze egy véges szabályban, vagyis az emberi elme (még a tiszta matematika területén is) végtelenül meghaladja bármely véges gép teljesítőképességét – vagy pedig léteznek (a fent leírt típusba tartozó) abszolút megoldhatatlan diofantikus problémák* (az sem zárható ki, hogy a két lehetőség mindegyike fennáll, így szigorúan véve három alternatívával van dolgunk). Ennek a matematikailag igazolt tényállásnak véleményem szerint különleges filozófiai jelentősége van. S ebből a szempontból nem ke-

---

2. a matematikai gondolkodásért az agyban pontosan ezek és ezek az anatómiai struktúrák s a köztük végbemenő fiziológiai folyamatok a felelősek.

Ha pedig a finitista (vagy az intuicionista) álláspontot tesszük magunkévá, egy ilyen típusú induktív következtetés azon (többé-kevésbé empirikus) meggyőződésre is alapítható, hogy a nem-finit (vagy a nem intuicionista) matematika konzisztens.

[14] A mechanizmus fizikai működését természetesen nagyon alaposan megérthetjük, az a belátás azonban, miszerint egy adott mechanizmus kizárólag helyes (vagy legalábbis konzisztens) eredményekhez kell hogy vezessen, már túllépne az emberi ész hatókörén.

vésbé fontos az a körülmény, hogy a tétel a matematika alapjait illető állásponttoktól teljes mértékben független.[15]

E függetlenség mindazonáltal bizonyos megszorítással értendő, jelesül azzal, hogy a szóban forgó álláspontnak elég liberálisnak kell lennie ahhoz, hogy értelmesnek fogadja el az *összes* természetes számról szóló állításokat. Ha valaki olyannyira szigorú finitista, hogy szerinte a valódi matematika csupán olyan típusú állításokból áll, mint amilyen a $2 + 2 = 4$,[16] akkor álláspontjáról a matematika kimeríthetetlenségére vonatkozó tétel nem alkalmazható – *ez* a tétel legalábbis nem. Nem hiszem azonban, hogy ez az álláspont következetesen fenntartható lenne, ugyanis a $2 + 2 = 4$ állítást pontosan ugyanolyan típusú evidencia alapján állíthatjuk, mint azt, hogy $a + b = b + a$, ahol a és b tetszőleges természetes számok.

[15] Az intuicionisták és a finitisták felfogása szerint ez a tétel – nem diszjunkcióként, hanem – implikációként érvényes. Megjegyzendő, hogy az első diszjunktív tagot az intuicionisták mindig is vallották (a másodikat pedig – azon az alapon, hogy nem létezhetnek bizonyíthatóan eldönthetetlen állítások – elutasították). Mindez azonban semmiféle következménnyel nem jár azon kérdés szempontjából, hogy vajon az intuicionista matematikára melyik alternatíva áll, ha a szóban forgó terminusokat objektív (az intuicionisták által jelentéssel nem bíróként elutasított) értelmük szerint használjuk. Ami a finitistákat illeti, nagy valószínűséggel állíthatjuk, hogy álláspontjuk szerint az első diszjunktív tag hamis.

[16] [Menger 1930] „implikacionista" álláspontja, ha a legszigorúbb értelmében tekintenénk, épp ilyen attitűdöt eredményezne; eszerint ugyanis az egyedül értelmes matematikai állítások (vagyis ha saját terminológiámat használom, a valódi matematikai állítások) azok lennének, amelyek azt mondják ki, hogy bizonyos konklúzió bizonyos axiómák és következtetési szabályok alapján ilyen és ilyen módon vonható le. Az ilyen állítások logikai jellege azonban tökéletesen ugyanaz, mint a $2 + 2 = 4$ állításé. Menger álláspontja több tarthatatlan következménnyel is jár. Olyan negatív állítások, amelyek szerint egy B konklúzió az axiómák és szabályok egy A rendszere alapján nem vonható le, nem tartozhatnának a valódi értelemben vett matematikai állítások közé; ennek következtében semmit nem tudhatnánk róluk, legfeljebb azt, hogy bizonyos más axiómák és szabályok alapján a konklúzió mégis levonható. Annak bizonyítása azonban, hogy ez utóbbi esetben a konklúzió ténylegesen levonható – lévén, hogy a szóban forgó újabb axiómák és szabályok tetszőlegesek lehetnek – semmiképpen sem zárná ki annak lehetőségét, hogy egy napon B-nek A-ból való levezetését is megtaláljuk (akár úgy is, hogy az állítás ellenkezőjét már formálisan bizonyítottuk). Ugyanezen gondolatmenetet követve az $a + b = b + a$ szabály szokásos indukciós bizonyítása sem zárná ki, hogy felfedezzünk két olyan számot, melyekre e szabály nem érvényes.

Mi több, ha ezen álláspontot konzisztensen akarjuk képviselni, akkor ki kell zárnunk azokat a fogalmakat is, amelyek, miként a „+", minden természetes számra (vagy, miként a „bizonyos szabályok alapján való korrekt bizonyítás", minden formulára) alkalmazhatók, s olyanokkal kellene helyettesítenünk őket, amelyek a számoknak (vagy a formuláknak) csupán valamely véges tartományán belül használhatók. Kijelenthetjük tehát, hogy diszjunktív tételünk igazsága nem függ a matematika alapjait illető állásfoglalásunktól – arról viszont, hogy az alternatívák közül melyik áll fenn, ugyanez már nem mondható el. (Lásd a 15. jegyzetet.)

Úgy vélem, a helyzet matematikai aspektusát kellően megvilágítottam, rátérhetek tehát a filozófiai következmények taglalására. Tekintettel a filozófia jelenlegi fejletlen állapotára, természetesen nem várható el, hogy e következtetéseket is a matematika szigorúságával vonjuk le.

A matematika befejezhetetlenségére vonatkozó alapvető tételünk diszjunktív formájának megfelelően *prima facie* a filozófiai következtetések is diszjunktívak lesznek; e következtetések azonban, függetlenül attól, hogy melyik alternatívát tartjuk igaznak, nagyon határozottan ellentétesek a materialista filozófiával. Az első alternatíva ugyanis alighanem azt vonja maga után, hogy az emberi elme működése nem redukálható az agyéra, amely minden valószínűség szerint véges számú alkotórészből – neuronokból és kapcsolódásaikból – felépülő véges gép. Ezt az alternatívát követve tehát, úgy tűnik, egyfajta vitalisztikus álláspont elfogadására kényszerülünk. Másrészről, ha a második alternatívából indulunk ki, vagyis abból, hogy léteznek abszolút értelemben eldönthetetlen matematikai állítások, azzal aláássuk azt az elképzelést, mely szerint a matematika tulajdon alkotásunk eredménye; az alkotónak ugyanis szükségszerűen ismernie kell alkotásának valamennyi tulajdonságát, hiszen az nem rendelkezhet olyan vonásokkal, amelyekkel nem alkotója ruházta fel. Ezen alternatíva tehát, úgy tűnik, ahhoz a nézethez vezet, mely szerint a matematikai tárgyak és a matematikai tények objektíve, mentális aktusainktól és döntéseinktől függetlenül léteznek (vagy legalábbis valami így létezik bennük), azaz – a matematikai tárgyak vonatkozásában – egyfajta platonizmust vagy realizmust implikál.[17] Elvégre a matematika empirista felfogása,[18] vagyis az a nézet, mely szerint a matematikai tények valójában speciális fizikai vagy pszichológiai tények, túlságosan abszurd ahhoz, hogy komolyan képviselhető legyen (lásd alább). Nem tudjuk, hogy vajon az első alternatíva fennáll-e, mindenesetre összhangban áll a neuoropszichológia egyes vezető szaktekintélyeinek véleményével, akik a leghatározottabban tagadják, hogy lehetséges lenne a pszichikai és az idegi folyamatok tisztán mechanisztikus magyarázata.

A második alternatíva ellenében azon érv is felhozható, mely szerint az alkotónak nem kell feltétlenül ismernie al-

[17] Nincs eléggé általános terminus, amellyel pontosan ki lehetne fejezni az imént levont konklúziót, amely tehát csak annyit mondana, hogy a matematika tárgyai és tételei éppoly objektívek és szabad választásunktól, illetve kreatív aktusainktól éppoly függetlenek, mint a fizikai világ. Ez azonban semmiképpen nem határozza meg, mik is valójában ezek az objektív entitások, különösképpen azt nem, hogy vajon a természetben vagy az emberi elmében lelhetők-e fel – esetleg ezek közül egyikben sem. Ez a három, a matematika természetét illető nézőpont pontosan megfeleltethető a fogalmak természetére vonatkozó azon álláspontoknak, amelyeket hagyományosan pszichologizmusnak, arisztotelészi konceptualizmusnak és platonizmusnak nevezünk.

[18] Az a nézet tehát, mely szerint a matematikai tárgyak, s a mód, ahogyan azokat megismerjük, nem különböznek számottevően a fizikai vagy pszichikai tárgyaktól, illetve a természet törvényeitől. Ennek valójában éppen az ellenkezője igaz: a matematika objektivitásának feltevéséből azonnal következik, hogy a matematika tárgyainak tökéletesen különbözniük kell az érzékelhető objektumoktól, ugyanis:

1. Amennyiben helyesen értelmezzük őket, a matematikai állításokról kiderül, hogy a tér-időbeli világ tényleges állásáról semmit sem mondanak. Ez különösképpen nyilvánvaló az olyan alkalmazott állítások esetében, mint például a következő: tegnap vagy esett az eső, vagy nem esett. Megjegyzésünk mindazonáltal nem zárja ki a fenti követelményeknek eleget tevő – s a matematika területén kívülre eső – tisztán konceptuális tudás lehetőségét.
2. A matematika tárgyaira precíz ismeretek vonatkoznak, az általános törvények pedig a bizonyosság erejével ismerhetők fel, azaz deduktív – és nem induktív – következtetések alapján.
3. Ugyanezen oknál fogva a matematika tételei (elvben) érzékszerveink igénybevétele nélkül, tehát csupán értelmünkre támaszkodva is megismerhetők, hiszen nem esetleges tényállásokról szólnak, mint amilyenekről érzékszerveink (a belső érzéket is beleértve) tájékoztatnak minket, hanem lehetőségekről és lehetetlenségekről.

kotásának valamennyi tulajdonságát. Építünk például gépeket is, mondhatná valaki, működésüket minden részletre kiterjedően mégsem látjuk előre. Ez az ellenvetés azonban nagyon gyenge lábakon áll. A gépeket ugyanis nem a semmiből teremtjük, hanem bizonyos, előzetesen készen álló anyagból építjük meg őket. Ha a matematikában a helyzet ehhez hasonló lenne, akkor konstrukcióink anyaga – vagy alapja – valami objektív lenne, ami viszont megint csak egy realista álláspont elfogadására kényszerítene bennünket, még akkor is, ha a matematika bizonyos más elemeit saját alkotásunkként tarthatnánk számon. Ugyanez lenne a helyzet, ha az alkotáshoz valami bennünk lévő, egónktól független eszközt kellene igénybe vennünk (ilyen lehetne például az „ész", mint egyfajta gondolkodó gépezet). Ekkor ugyanis a matematikai tényekben (legalábbis részben) ezen – objektíve létező – eszköz tulajdonságai is kifejezésre jutnának.

A harmadik ellenvetés abból indulhatna ki, hogy az összes természetes számra vonatkozó állítások jelentése csak egy általános bizonyítás létezésének tételezése lehet – elvégre lehetetlen egy állítást egytől-egyig valamennyi számra ellenőrizni. Az összes természetes számra vonatkozó eldönthetetlen állítások esetében így sem az állítás, sem a tagadása nem igaz. Ennek következtében egyik sem fejezi ki a számok valamely objektíve létező, ám ismeretlen tulajdonságát. E helyütt nem vitathatjuk meg azt az ismeretelméleti kérdést, hogy e feltevés konzisztens-e egyáltalán. Mindenesetre erősen úgy tűnik, hogy az embernek *először* meg kell értenie egy állítás jelentését, még *mielőtt* megérthetné a bizonyítását, minek következtében a 'minden' jelentése nem definiálható a 'bizonyítás' jelentésének alapján. Ettől az ismeretelméleti kérdéstől függetlenül szeretnék azonban rámutatni, hogy lehetséges úgy megsejteni valamely univerzális állítás igazságát (azon az alapon például, hogy bizonyos tulajdonság teljesülését tetszőleges adott számra képesek vagyunk ellenőrizni), hogy egyúttal azt is sejtjük: a szóban forgó tényállásnak nem létezik általános bizonyítása. Könnyen elképzelhetünk olyan szituációkat, amelyekben mindkét sejtés jól megalapozott. Az első sejtés megalapozott lehet például abban az esetben, amikor a szóban forgó állítás olyan $F(n) = G(n)$ alakú, két számelméleti függvényre vonatkozó egyenlőség, amelynek fennállását *igen nagy n* számokig ellenőrizhetjük.[19] S ehhez hozzátehetjük: a matematikában, éppúgy, mint a természettudományokban, az ilyen *inductio per enumerationem simplicem* korántsem az egyetlen szóba jöhető induktív módszer. Elismerem persze, hogy minden matematikus veleszületett módon idegenkedik attól, hogy az efféle induktív érveléseknek egyfajta heurisztikus jelentőségnél többet tulajdonítson. Mégis úgy vélem, hogy ez éppenséggel abból az előítéletből fakad, mely szerint a matematikai tárgyak igazából nem bírnak valódi egzisztenciával. Ha a matematika, a fizikához hasonlóan, egy objektív világ leírása lenne, akkor nem tudnánk megindokolni, miért ne alkalmazhatnánk induktív módszereket a matematikában is, éppúgy, mint a fizikában. A helyzet az, hogy a jelen matematikájában ugyanaz a megközelítésmód érvényesül, amelyet valaha az összes tudományra érvényesnek gondoltak: mindent a definíciókból (avagy, ha az ontológiai terminológiát követjük, a dolgok lényegéből) próbálunk levezetni, kétségbevonhatatlan bizonyítások segítségével. Lehetséges, hogy e módszer, amennyiben egyeduralomra tör, a matematikában éppoly tévesnek bizonyul majd, mint egykor a fizika esetében.

Gondolatmenetünk tehát mellékesen arra is rávilágított, hogy a fent bemutatott matematikai tényállás filozófiai következményei nem kizárólagosan a racionalista vagy idealista filozófiát támasztják alá: legalább egy szempontbólaz empirista

[19] Két nem túlságosan bonyolult vagy mesterkélt számelméleti függvény *egyenlőségének* (tehát nem egy egyenlőtlenségnek) ilyen típusú igazolása feltehetően nagy valószínűséget kölcsönöz a két függvény minden argumentumra kiterjedő egyenlőségének, holott e valószínűség numerikus értéke a tudomány jelenlegi állása alapján általában nem becsülhető meg. Könnyű azonban példát mondani olyan univerzális számelméleti állításokra, amelyek esetében e valószínűség már jelen ismereteink alapján is megbecsülhető. Annak az állításnak a valószínűsége például, mely szerint tetszőleges n számra a π tízes számrendszerbeli alakjának n-edik és n^2-edik számjegye között van legalább egy $\neq 0$ számjegy, 1-hez konvergál, amint az állítást egyre nagyobb és nagyobb n-ekre ellenőrizzük. Hasonló a helyzet Goldbach és Fermat tételeinek [sic!] esetében is.

nézőpontot is előnyben részesítik.[20] Igaz persze, hogy ebbe az irányba csupán a második alternatíva mutat. Mindenesetre úgy tűnik számomra – s az alábbiakban ennek tárgyalására kívánok rátérni –, hogy a második alternatíva filozófiai következményeit, különösképpen a konceptuális realizmust (platonizmust) a matematikai alapkutatások újabb eredményei is alátámasztják, függetlenül attól, hogy az alternatívák közül melyik áll fenn. Az ebbe az irányba mutató fontosabb érvek véleményem szerint a következők lehetnek. Először is: még ha a matematika saját szabad alkotásunk volna, akkor is előfordulhatna, hogy az általunk megalkotott objektumok némelyikére vonatkozóan hiányosak az ismereteink, ez azonban csupán annak lenne betudható, hogy nem értettük meg elég világosan, mit is teremtettünk (vagy pedig a túlságosan bonyolult számítások kapcsán fellépő nehézségeknek). Tudásunk fehér foltjai el kellene, hogy tűnjenek, amint elérnénk a tökéletes világosságot (legalábbis elvben, bár a gyakorlatban nem feltétlenül[21]). A dolog mégsem így áll: a matematika megalapozásának kutatása révén az egzaktság legmagasabb szintjeire jutottunk el, ez azonban gyakorlatilag semmiféle támpontot nem nyújt matematikai problémák megoldásához.

Másodszor, a matematikus tevékenysége nem sokat árul el abból a szabadságból, amit egy alkotónak élveznie kellene. Még ha – példának okáért – a természetes számokra vonatkozó axiómákat szabadon találták volna ki, akkor is el kellene ismernünk, hogy a matematikus, amint elképzelte tárgyainak első néhány tulajdonságát, máris elérkezett alkotóképességeinek határaihoz, s már nincs abban a helyzetben, hogy a tételek érvényességét akarata szerint alkossa meg. Ha a matematikában van valami, ami az alkotáshoz hasonlítható, akkor a tételek jelentősége éppen az alkotás szabadságának korlátozásában keresendő. Annak azonban, ami az alkotás szabadságát

[20] Hogy pontosabbak legyünk, azt sugallja, hogy a matematika és a természettudományok között nem is olyan nagy a különbség. Az viszont már más kérdés, hogy végeredményben melyik a helyes álláspont: az empirizmus vagy az apriorizmus?

[21] Ehhez ugyanis minden problémát egy véges számítás elvégzésére kellene redukálnunk.

korlátozza, nyilvánvalóan léteznie kell, méghozzá az alkotástól függetlenül.[22]

Harmadszor, ha a matematikai tárgyak saját alkotásaink, akkor a természetes számok, valamint a természetes számok halmazának részhalmazai két különböző alkotás eredményei lennének, amelyek közül az első semmiféleképpen nem vonja maga után a másodikat. Vannak azonban olyan, természetes számokra vonatkozó állítások, amelyek bizonyításához a – természetes számokból, mint elemekből álló – halmaz fogalma is nélkülözhetetlen. Ez esetben tehát annak felismeréséhez, hogy milyen tulajdonságokkal is ruházta fel képzeletünk saját teremtményeit, előbb bizonyos másfajta objektumokat is meg kell alkotnunk – s ez igen-igen különös helyzet!

Az eddig mondottakban olyan homályos kifejezések szerepeltek, mint a „szabad alkotó vagy feltaláló tevékenység". Többen próbálták már e kifejezéseket precíz jelentéssel felruházni. Ezzel azonban csupán azt érték el, hogy az ilyen álláspont cáfolata még pontosabbá és meggyőzőbbé vált. Az alábbiakban ezt részletesen is alátámasztom, méghozzá arra a nézetre vonatkozóan, amelynek megfogalmazása mind ez idáig a legsarkosabb és egyúttal a legradikálisabb is. E felfogás szerint a matematikai állítások csupán szintaktikai (vagy nyelvi) konvenciók[23] bizonyos aspektusait fejezik ki, lényegében tehát ezen konvenciók némelyikét ismétlik csak meg. A meg-

[22] Hiábavaló lenne arra hivatkozni, hogy ezekre a megszorításokra azért van szükség, hogy a konzisztencia – ugyancsak szabadon választott – követelményének eleget tehessünk, hiszen dönthetünk a konzisztencia *és* bizonyos tételek mellett is. Nem segít az sem, ha azt mondjuk: a tételek csupán (részben vagy egészben) az elsőként bevezetett tulajdonságokat ismétlik, ez esetben ugyanis az elmélet valamennyi kérdésének eldöntéséhez elegendő lenne az első feltevéseket alaposan megvizsgálni – ezt azonban az első (lásd fentebb) és a harmadik (lásd alább) érv is cáfolja.

[23] A konvenciók tehát nyelven kívüli objektumokra nem vonatkozhatnak (ellentétben a demonstratív definíciókkal), a szimbolikus kifejezések jelentésére vagy igazságára vonatkozóan csakis olyan szabályokat állíthatnak fel, amelyek ezen kifejezések grammatikai struktúráján alapulnak. E szabályokból ezen felül egyetlen tényállítás igaz vagy hamis volta sem következhet (mivel akkor nem nevezhetnénk őket sem tartalom nélkülinek, sem szintaktikainak). Ebből azonban következik, hogy konzisztensnek kell lenniük, hiszen egy ellentmondásból (a klasszikus logika törvényei szerint, amelyeket

felelő alapossággal elvégzett elemzés eszerint azt mutatná ki, hogy a matematikai állítások éppen úgy híján vannak minden tartalomnak, mint például a 'Minden csődör ló' állítás. Bárki egyetért azzal, hogy ez az állítás nem fejez ki se zoológiai, se másféle objektív tényállást, igazsága egyedül abból ered, hogy a 'csődör' a 'hímnemű ló' kifejezés rövidítése. A szimbolikus konvenciók leginkább elfogadott típusát a definíciók alkotják, legyenek akár explicitek, akár kontextuálisak; az utóbbiak esetében mindig megkövetelhetjük, hogy az általuk definiált terminusok bármely kontextusban kiküszöbölhetők legyenek. A nominalista nézőpont legegyszerűbb változata szerint tehát a matematikai állítások igazsága egyedül a bennük szereplő terminusok definícióján múlik, vagyis a terminusokat rendre definienseikkel helyettesítve minden tétel explicit, $a = a$ alakú tautológiára redukálható. (Vegyük észre, hogy $a = a$ igazságát már a definíciók elfogadása garantálja: definiáljuk ugyanis b-t az $a = b$ azonossággal, majd a definíció értelmében b-t ugyanebben az egyenlőségben helyettesítsük a-val.) Az elő-

---

itt érvényesnek fogadunk el) valamennyi tényállítás következne. Megjegyzendő, hogy amennyiben a 'szintaktikai szabály' terminust ebben az általános jelentésben használjuk, akkor a vizsgált nézet – mint egyik lehetséges további kifejtését – magában foglalja a matematika formalista megalapozását is; ez utóbbi szerint ugyanis a matematika kizárólag bizonyos szintaktikai szabályokon alapul. Ezen szabályok általános formája: az ilyen és ilyen szerkezetű állítások mind igazak (ezek lennének az axiómák), továbbá amennyiben a ... szerkezetű állítások igazak, akkor ilyen és ilyen további állítások is azok; könnyen látható, hogy a konzisztencia bizonyítása biztosítaná, hogy ezen szabályok valóban tartalom nélküliek legyenek, abban az értelemben, hogy belőlük egyetlen tényállítás se következzen. Másrészt, mint az alábbiakban látni fogjuk, vice versa a nominalista program tarthatósága maga után vonja a formalista programét is. A nominalista nézőpont filozófiai aspektusainak világos kifejtését lásd [Hahn 1935], illetve [Carnap 1935a]. Mindazonáltal kétségbe vonható, hogy vajon a nominalista felfogás, amely teljességgel tagadja a matematikai tárgyak létezését, beleillik-e abba a nézetbe, mely szerint a matematika az elme szabad alkotótevékenységének eredménye. A két felfogás között mindenesetre különösen szoros kapcsolat áll fenn: az utóbbi szerint a matematikai tárgyak úgynevezett létezése egyedül abban áll, hogy gondolatban megkonstruálhatók, azt azonban a nominalisták sem vonnák kétségbe, hogy a matematikai szimbólumok mögé alkalomadtán (nem létező) objektumokat képzelünk, miként azt sem, hogy ezen elképzelések akár a szintaktikai szabályok kijelölésének vezérlő elveként is szolgálhatnak.

zőekben ismertetett tételek alapján azonnal nyilvánvaló, hogy nem lehetséges valamennyi tételt explicit tautológiára redukálni. Ha ugyanis ezt mindig megtehetnénk, akkor rendelkezésünkre állna egy mechanikus eljárás, amelynek alapján valamennyi matematikai állítás igaz vagy hamis voltát eldönthetnénk. Ilyen eljárás azonban nem létezhet, még akkor sem, ha kizárólag az aritmetika állításaira szorítkozunk. Ez a cáfolat kétségkívül csupán a nominalista álláspont legegyszerűbb formájára alkalmazható, de a körmönfontabb változatok sem sokkal védhetőbbek. A matematika tautologikus jellegét bizonyítandó legalábbis az alábbi tézist kellene belátnunk: Minden bizonyítható matematikai állítás levezethető egyedül a mondatok igazságára, illetve hamisságára vonatkozó szabályok alapján (vagyis anélkül, hogy ezen szabályokon kívül bármit is ismernénk vagy felhasználnánk), tagadásuk azonban ilyen módon nem vezethető le. Precízen felépített nyelvek esetében ezek a (mondatok igazságfeltételeit meghatározó) szabályok a mondatok jelentésére vonatkozó iránymutatásként értelmezhetők. Valamennyi ismert nyelvben *megadhatók* olyan állítások, amelyek igazsága, úgy tűnik, egyedül ezen szabályokon múlik. Ha például az alternációt és a negációt ezekkel a kikötésekkel vezetjük be:

(1) $p \vee q$ igaz, ha legalább valamelyik tag igaz, valamint

(2) $\sim p$ igaz, ha p nem igaz,

akkor ezen szabályok alapján nyilvánvaló, hogy $p \vee \sim p$ mindig igaz, bármi legyen is p. (Az ily módon levezethető állításokat nevezzük tautológiának.) A dolog valóban így áll: a matematikai logika jelölésrendszerében, megfelelően választott szemantikai szabályok alapján, a matematikai axiómák *ténylegesen* levezethetők[24] – azonban, s a kutya itt van eltemetve, a levezetés során a matematika és a logika fogalmait

[24] Lásd [Ramsey 1926], 368. és 382. p., [Carnap 1937], 39. és 110. p. Érdemes megemlíteni, hogy Ramsey az axiómákat $a = a$ alakú explicit tautológiákra tudta redukálni – azon az áron, hogy megengedett végtelen (sőt transzfinit) hosszúságú állításokat is. Ahhoz azonban, hogy e végtelen objektumokat kezelni tudja, a transzfinit halmazelméletet elemeire is szüksége volt. Carnap

és axiómáit is felhasználjuk, méghozzá egy speciális módon: magukra a szimbólumokra, azok kombinációira, ilyen kombinációk halmazaira stb. alkalmazva. Vagyis ahhoz, hogy az axiómák bizonyíthatóan tautologikusak legyenek, előzetesen fel kell tennünk, hogy igazak. Az eredeti tézis tehát, mely szerint a matematikai axiómák igazsága azáltal tehető nyilvánvalóvá, hogy megmutatjuk, valójában tautológiák, a visszájára fordult: *először* fel kell tennünk, hogy az axiómák igazak, s csak *azután* tudjuk belátni – egy megfelelően választott nyelv keretein belül –, hogy tautológiák. Ugyanez elmondható a matematikai fogalmakról is: ahelyett, hogy jelentésük szimbolikus konvenciók által definiálható lenne, e jelentéssel már előzetesen tisztában kell lennünk ahhoz, hogy megérthessük a szóban forgó szintaktikai konvenciókat vagy pedig annak bizonyítását, hogy ezek alapján valamennyi axióma levezethető, azonban egyiknek a tagadása sem. Nyilvánvaló mármost, hogy a nominalista álláspontnak ez a kifejtése nem felel meg a korábban támasztott követelményeknek: a levezetésekben nem csupán a szintaktikai szabályokat, de a matematika egészét fel kell használnunk. Mi több, a nominalista álláspont a kifejtés által éppenséggel önmagát cáfolta meg (az igazat megvallva, ennél nyilvánvalóbb cáfolatot el sem tudnék képzelni) – legalábbis amennyiben valóban feltehetjük, hogy a konklúzió elkerülhetetlen (azaz nem függ a szimbolikus nyelv választásától, s attól, hogy a matematika mely interpretációját vesszük alapul). Pontosan ez ugyan nem bizonyítható, valami igen hasonló viszont igen, ami már elégséges a nominalista álláspont cáfolatához. A korábban már említett metatételekből ugyanis az következik, hogy a matematikai axiómák tautologikus jellegének igazolása (valamely nyelv keretein belül) egyszersmind konzisztenciájuk bizonyítása is – ez azonban az axiómákban eleve benne foglalt bizonyítási módszereknél *gyengébb* eszközökkel nem lehetséges. Nem arról van szó, hogy egy rendszer konzisztenciájának bizonyításához a rendszer *összes* axiómájára szükség lenne. Éppen ellenkezőleg, egyes axiómák

---

csak véges hosszúságú állításokról beszél, azonban tekintetbe kell vennie ilyenek végtelen halmazait, sőt halmazainak halmazait is.

kezeléséhez sokszor bizonyos rendszeren kívüli axiómákra van szükségünk (bár az előbbiek az utóbbiakból nem következnek).[25] Ezen megfontolások alapján a következőkben bizonyosak lehetünk: Ahhoz, hogy bizonyíthassuk a klasszikus aritmetika (s *a fortiori* valamennyi erősebb rendszer) konzisztenciáját, szükségünk van bizonyos *absztrakt* fogalmakra (és a rájuk vonatkozó, közvetlenül evidens axiómákra); itt az „absztraktság" azt jelenti, hogy érzékeinkkel nem észlelhető objektumokra vonatkozó fogalmakról van szó;[26] az ilyen fogalmak egy speciális típusát alkotják a szimbólumok. Ezek a fogalmak azonban nyilván nem szintaktikaiak – éppen ellenkezőleg: szintaktikai megfontolások alapján való igazolásuk lenne a nominalizmus feladata. Következésképp *szintaktikai interpretáció alapján a klasszikus matematika alkalmazhatóságát és konzisztenciáját illető prekritikai meggyőződéseink semmiféle racionális igazolással nem támaszthatók alá (még akkor sem, ha az aritmetikára szorítkozunk).* El kell ismernünk mindazonáltal, hogy mindez már nem érvényes a klasszikus matematika egyes rendszereire, melyek magukban foglalhatják a szóban

[25] Egy példát említve: a halmazelmélet axiómarendszereinek előadásom elején említett sorozatában bármely *S* axiómarendszerre, amely a kiválasztási axiómát is magában foglalja, az axiómák következő szintje (vagy pedig egy *S* konzisztenciáját kimondó axióma) alapján megadható egy konzisztenciabizonyítás anélkül, hogy a kiválasztási axiómára hivatkoznánk. Hasonlóképpen az sem kizárt, hogy a hierarchia alsóbb szintjeire vonatkozó axiómák konzisztenciája a magasabb szintekre vonatkozó axiómáknak akár olyan leszűkítése alapján is bizonyítható, amely a bizonyítást még az intuicionisták által is elfogadhatóvá teszi.

[26] Absztrakt fogalmakra példa a „halmaz", az „aritmetikai függvény", a „bizonyítható" (abban a nem-formális értelmezésben, hogy „tudható, hogy igaz"), a „levezethető" stb., s végül a – valamennyi *lehetséges* szimbólumkombinációra vonatkozó – „létezik". Az, hogy ezekre a fogalmakra a klasszikus matematika konzisztenciájának bizonyításához mindenképpen szükség van, annak következménye, hogy a szimbólumok a természetes számok halmazára képezhetők, minek eredményeképpen a finit – s *a fortiori*, a klasszikus – aritmetika már valamennyi, egyedül ezen szimbólumokon alapuló bizonyítást magában foglalja. E tényállás egyelőre nem tekinthető minden kétségen felül megalapozottnak, a nem-absztrakt fogalmakra vonatkozó evidens axiómákat ugyanis egyelőre nem vizsgálták meg eléggé alaposan. Magát a tényt azonban még a vezető formalisták is elfogadják. Lásd [Bernays 1941], 144., 147. p.; [Bernays 1935a], 68., 69. p.; [Bernays 1935b], 94. p.; [Bernays 1954], 2. p.; [Gentzen 1937], 203. p.

forgó absztrakt fogalmak elméletének *egyes elemeit* is. E tekintetben a nominalizmus elkönyvelhet bizonyos részsikereket. Ezeknek a rendszereknek az axiómái tisztán szintaktikai megfontolások alapján is igazolhatók. A természetes számokra vonatkozó „minden" és „létezik" fogalmak például igazolhatók ilyen módon, azaz kimutatható róluk, hogy konzisztensek. A legjellemzőbb aritmetikai axióma, a teljes indukció vonatkozásában azonban a szintaktikai megalapozás – még ha olyan kereteket választunk is, melyek között ez lehetséges – nem elegendő az axióma igazságába vetett prekritikai meggyőződésünk igazolásához, mivel éppen erre az axiómára szükségünk van már a szintaktikai érveléshez is.[27] Minél gyengébb axiómákat tételezünk fel, tautologikus interpretációjukhoz annál kevesebb matematikára van szükség. Ha végül csupán egy véges tartományra – mondjuk az 1000-nél nem nagyobb természetes számokra – szorítkozunk, akkor az erre vonatkozó érvényes matematikai állítások interpretálhatók oly módon, hogy a szó legszorosabb értelmében tautologikusak, azaz a terminusok explicit definíciója segítségével explicit tautológiákra visszavezethetők legyenek. Ez nem csoda, ha meggondoljuk, hogy az efféle véges matematika konzisztenciájának bizonyításához szükséges módszerek már eleve benne foglaltatnak a véges kombinatorikus eljárások azon elméletében, amely ahhoz szükséges, hogy az egyes formulákat – helyettesítések révén – explicit tautológiákra vezethessük vissza. Ez a magyarázata annak a jól ismert, ám félrevezető ténynek, hogy az olyan formulák, mint mondjuk az '$5 + 7 = 12$', bizonyos definíciók segítségével explicit tautológiákra vezethetők vissza. Félrevezető azért, mert ha az ilyen visszavezetéseket definiendumok definienseikkel való, explicit definíciókon alapuló behelyettesítéseinek fogjuk föl, akkor a bennük szereplő '+' nem a szo-

[27] Az aritmetika szintaktikai megalapozásával szemben felhozott fenti ellenvetés lényegében ugyanaz, mint amellyel Poincaré támadta az aritmetikának mind a Fregétől, mind a Hilberttől származó megalapozását. Az ellenvetés Fregével szemben mindazonáltal nem megalapozott, hiszen a Frege által előfeltételezett logikai fogalmak és axiómák nem foglalják magukban a „véges sokaság" fogalmát s az erre vonatkozó axiómákat; viszont a grammatikai fogalmakról, valamint a szintaktikai szabályok felállításához s tautologikus voltuk igazolásához szükséges megfontolásokról már nem mondható el ugyanez.

kásos értelmezés szerinti '+' lesz, az előbbit ugyanis csupán véges sok argumentumra értelmeztük (az esetek felsorolása alapján). Ha viszont a '+' kontextuális definícióját vesszük alapul, akkor már a $2 + 2 = 4$ igazolásához is a véges halmaz fogalmára kell hivatkoznunk. Ugyanilyen körkörösség érhető tetten annak bizonyításában is, hogy $p \vee \sim p$ tautológia, mivel az érvelésben – intuitív jelentésük alapján – mind az alternáció, mind a negáció szerephez jut.

A nominalista álláspont lényege az a meggyőződés, miszerint matematikai tények egyáltalán nem léteznek, s az ilyen tényeket kifejező állítások, amennyiben igazak, csupán arra utalnak, hogy a nyelvben (azon, meglehetősen bonyolult szabályok révén, amelyek az állítások jelentését, azaz igazságfeltételeit rögzítik) egyfajta üresjárat érhető tetten, minek következtében a szabályok a szóban forgó állítást a tényektől függetlenül igazzá teszik. Az ilyen állításokat joggal nevezzük tartalom nélkülinek. Lehetséges mármost olyan nyelveket konstruálni, amelyben a matematikai állítások ebben az értelemben tartalom nélküliek. Ekkor azonban a következő problémákkal szembesülünk:

1. annak igazolásához, hogy valamely matematikai tény nem létezik, magára erre a tényre kell hivatkoznunk (vagy más, hasonlóan bonyolult tényekre);

2. másrészt ugyanezzel a módszerrel, amennyiben adott az empirikus tények két olyan A és B osztálya, hogy B alapján egyetlen A-beli tényre sem következtethetünk, konstruálhatunk olyan nyelvet, amelyben a B-beli tényeket leíró állítások mind tartalom nélküliek. Ha pedig valaki a következő ellenvetéssel áll elő: „Ezzel önkényesen figyelmen kívül hagyod, hogy bizonyos B-beli tények valóban megfigyelésen alapulnak", akkor azt mondhatjuk: „Te ugyanezt az álláspontot foglalod el a teljes indukció szabályával kapcsolatban, amelyet viszont én tartok igaznak, a természetes szám fogalmának megértése (tehát egyfajta észlelés) alapján."

Mindazonáltal úgy tűnik, hogy még a matematikai igazság ezen elhibázott elméletének is van egy tökéletesen helyénvaló összetevője, mely fényt vet a matematika valódi természetére. A matematika állításai ugyanis valóban nem mondanak semmit a térben és időben fennálló fizikai vagy pszichikai tényekről, lévén igazságuk a valóban létező dolgok világától függetlenül, már a bennük előforduló terminusok jelentéséből adódik. A tévedés abban áll, hogy a terminusok jelentését (tehát az általuk jelölt fogalmat) tőlünk eredőnek, s pusztán szemantikai konvenciók összességének tekintik. Az igazság ezzel szemben, meggyőződésem szerint, hogy e fogalmak önálló, objektív létezéssel bírnak, s olyan valóságot, amelyhez tartoznak, mi teremteni nem tudunk, csupán észlelni és leírni.[28]

A matematikai állítások tehát, még ha a téridőbeli valóságról nem is mondanak semmit, mégiscsak rendelkeznek világos, objektív – fogalmak viszonyait leíró – tartalommal. Hogy a matematikai fogalmak között léteznek semmiképpen sem „tautologikus" relációk, az már annak alapján is nyilvánvaló, hogy a matematika primitív terminusaira vonatkozóan olyan axiómákat kell feltennünk, amelyek tautológiának semmiképpen nem nevezhetők (abban az értelemben legalábbis, hogy $a = a$ alakúra lennének redukálhatók), sokkal inkább a szóban forgó terminusok jelentéséből következnek. A „természetes számokból álló halmaz" fogalmára vonatkozó alapvető axióma, vagy inkább axiómaséma például azt mondja ki, hogy tetszőleges, természetes számokra értelmezhető jól definiált tulajdonságához, azaz tetszőleges $\varphi(n)$ nyitott mondathoz, amelyben az n változó értékei természetes számok lehetnek, létezik az ilyen tulajdonságú számok M halmaza. Figyelembe véve mármost, hogy φ eleve tartalmazhatja a 'természetes számokból álló halmaz' kifejezést, e halmazok vo-

[28] Ez még a matematika azon részeire is érvényes, amelyek *ténylegesen* visszavezethetők a szintaxis szabályaira (lásd fent). Ezen szabályok ugyanis a véges sokaság (közelebbről, szimbólumok véges sorozata) ideáján alapulnak, amely viszont karakterisztikus tulajdonságaival egyetemben teljes mértékben független szabad választásunktól, s a leírását megadó elmélet lényegében ekvivalens a természetes számok elméletével. Azon lehetőség fennállása tehát, hogy konstruálható olyan elmélet, amelynek szintaktikai szabályai magukban foglalják a természetes számok elméletét, az égvilágon semmit nem bizonyít.

natkozásában megint csak – meglehetősen körmönfont – axiómák egész sorozatával van dolgunk. Ezek az axiómák viszont nemhogy explicit tautológiákra nem redukálhatók, de lényegesen nem is egyszerűsíthetők. Valójában a 'halmaz' kifejezés jelentése alapján érvényesek – akár azt is mondhatnánk, hogy magának a 'halmaz' kifejezésnek a jelentését ezen axiómák adják meg –, így leginkább helyénvaló az volna, ha analitikusnak neveznénk őket. A 'tautologikus', azaz 'tartalom nélküli' jelző ez esetben tökéletesen alkalmatlan, elvégre az, hogy létezik olyan halmazfogalom, amely ezen axiómákat kielégíti, vagy az a kijelentés, hogy ezen axiómák konzisztens rendszert alkotnak, olyannyira nem tartalom nélküli, hogy nem is bizonyítható anélkül, hogy magára e fogalomra – vagy valamely más, hasonló természetű absztrakt fogalomra – hivatkoznánk. Ez az érvelés persze csupán azokat a matematikusokat célozza meg, akiknek nincsenek fenntartásaik a halmaz általános fogalmának a valódi értelemben vett matematikában való alkalmazhatóságát illetően. Ami a finitistákat illeti, velük szemben szó szerint ugyanezen argumentum hozható fel a természetes szám fogalmára és a teljes indukció axiómájára vonatkozóan. Ha ugyanis az általános halmazfogalmat a valódi értelemben vett matematikából kirekesztjük, akkor a teljes indukciót axiómaként kell felvennünk.

Újfent hangsúlyozni szeretném azonban, hogy az 'analitikus' jelentése e helyütt nem 'igaz a definíciók alapján', hanem sokkal inkább 'igaz a benne előforduló fogalmak természete alapján', mintegy ellentétben azzal, hogy 'igaz a dolgok tulajdonságai és működésük alapján'. 'Analitikus' ezek szerint korántsem jelenti azt, hogy 'tartalmatlan' – olyannyira, hogy tökéletesen lehetséges az is, hogy valamely analitikus állítás eldönthetetlen (vagy csak bizonyos valószínűséggel eldönthető). A fogalmak világára vonatkozó tudásunk ugyanis lehet éppoly korlátozott s hézagos, mint amilyenek a dolgokra vonatkozó ismereteink. E tudás továbbá számos esetben nem csupán befejezetlen, de egyenesen homályos is. Ezt tanúsítják a halmazelmélet paradoxonjai, amelyeket sokan – meglátásom szerint eléggé igaztalanul – a platonizmus cáfolatának tekintenek. Látásunk sok esetben ellentmondásban áll tapintásunkkal – példának okáért egy vízbe merülő pálca esetében –, ebből azonban, ép ésszel legalábbis, senki sem következtet arra, hogy a külvilág nem létezik.

Szándékosan beszélek a dolgok és a fogalmak két különálló világáról, nem hiszem ugyanis, hogy az arisztotelészi realizmus, mely szerint a fogalmak a dolgoknak csupán részei vagy aspektusai, tartható lenne.

Természetesen nem állítom, hogy a megelőző fejtegetések minden kétséget kizáróan alátámasztják a matematika természetére vonatkozó platonista álláspont helyességét. A legtöbb, amit állíthatok, hogy sikerült megcáfolnom a nominalista felfogást, mely szerint a matematika egésze szintaktikai konvenciókban, s azok következményeiben merül ki. Reményeim szerint ezen felül erős érveket hoztam fel az általánosabb nézettel szemben is, mely szerint a matematika tulajdon alkotásunk eredménye. A platonizmusnak mindazonáltal vannak más alternatívái is: a pszichologizmus és az arisztotelészi realizmus. Ahhoz tehát, hogy belássuk, a realizmus platonista változata az egyetlen tartható álláspont, először ezeket kellene sorra megcáfolni, majd be kellene látni, hogy ezzel valamennyi lehetőséget kimerítettük. Nem vagyok abban a helyzetben, hogy ezt megtehetném – néhány megjegyzés erre vonatkozóan mindazonáltal helyénvaló lehet. A pszichologizmus egy változata szerint akár azt is elfogadhatjuk, hogy a matematika olyan fogalmak viszonyait tárja fel, amelyeket önkényesen nem befolyásolhatunk – e fogalmak azonban csupán pszichológiai diszpozíciók, hogy úgy mondjam, gondolkodó mechanizmusunk fogaskerekei. Egy fogalom olyan diszpozíció, melynek révén

1. midőn a fogalomra gondolunk, bizonyos mentális élmény részesei leszünk, továbbá

2. az illető fogalom más fogalmakkal és a tapasztalat tárgyaival való kapcsolatairól ítéleteket alkothatunk (vagy a közvetlen tudás tapasztalatára teszünk szert).

A pszichologizmus lényege az a meggyőződés, mely szerint a matematika bizonyos pszichológiai törvények összessége, amelyeknek megfelelően gondolataink, meggyőződéseink és más hasonlók kialakulnak, éppúgy, ahogy érzelmeink létrejötte a pszichológia egy másik területének törvényei szerint történik. E nézettel szemben, amennyire most látom, a fő ellenvetés az, hogy amennyiben igaz, úgy semmiféle matematikai tudással nem rendelkezhetnénk. Nem tudhatnánk például azt sem, hogy $2 + 2 = 4$, mindössze azt, hogy elménk konstitúciója olyan, hogy ezt igaznak kell vélnie; de nem lehetünk meggyőződve arról, hogy – egy másfajta gondolatmenet alapján – nem juthatunk ugyanilyen bizonyossággal az ellentétes konklúzióra. Ezt az álláspontot tehát senki sem teheti magáévá, aki szerint vannak olyan *matematikai* állítások, amelyekről *tudjuk*, hogy igazak.

A leghatározottabb meggyőződésem, hogy az iménti gondolatmenetek a fogalmak alapos elemzése révén a matematikai szigorúság követelményeinek eleget téve is megismételhetők, s hogy (bizonyos aligha tagadható feltevésekre támaszkodva, pédáulul arra, hogy matematikai tudás igenis létezik) arra a konklúzióra kell jutnunk, hogy a matematika természetére vonatkozó álláspontok közül egyedül a platonizmus tartható. A platonizmus pedig az a nézet, mely szerint a matematika egy érzékszerveinkkel nem észlelhető valóságot ír le, amely az emberi elme aktusaitól és diszpozícióitól függetlenül létezik, s amelyet az elme csupán észlel, méghozzá valószínűleg igen-igen kezdetlegesen. Ez a felfogás nem túlzottan népszerű, de azért vannak jelentős matematikusok, akik ebben a szellemben foglaltak állást. Hermite például egy helyütt így ír:

> „Il existe, si me je ne trompe, tout un monde qui est l'ensemble des vérites mathématiques, dans lequel nous n'avons accès que par l'intelligence, comme existe le monde des réalités physiques; l'un et l'autre indépendants de nous, tous deux de création divine."[29]

[29] Idézi [Darboux 1912], 142. p. Hermite ekképpen folytatja:

> „qui ne semblent distincts qu'à causa de la faiblesse de notre esprit, qui ne sont pour une pensée plus puissante qu'une seule et même chose, et dont la synthèse se rév"ele partiallement dans cette merveilleuse correspondance entre les Mathematiques abstraites d'une part, l'Astronomie et tout les branches de la Physique de l'autre."

[A fizikai realitás mellett, ha nem tévedek, létezik a matematikai igazságok egy önálló világa is, amelyet csak elménk képes megragadni. Mindkét világot Isten teremtette, s mindkettő tőlünk függetlenül létezik.]

Hermite tehát, úgy tűnik legalábbis, az arisztotelészi realizmus álláspontját teszi magáévá. Mégis, ezt csupán szimbolikus gesztusnak kell tekintenünk – az emberi elme számára ugyanis egyetlen tartható álláspont van csak: a platonizmus.

Fordította Csaba Ferenc

[és csupán elménk korlátozott képességei folytán látszanak különbözőnek; egy hatalmasabb elme számára azonban már nem ez lenne a helyzet; szintézisük részlegesen már az absztrakt matematikai tudományok valamint a csillagászat és a fizika más területei közötti csodálatos párhuzamban is megmutatkozik.]