WILLIAM W. TAIT

FINITIZMUS*[x]

A hilberti finitista matematika[1] megértéséhez a kulcsot az alábbi kérdés jelenti:

> Milyen értelemben bizonyíthatók a természetes számokról olyan állítások, mint amilyen például
>
> $$\forall xy(x + y = y + x),$$
>
> anélkül, hogy feltételeznénk a számok – vagy más objektumok – végtelen sokaságát?

Ahhoz ugyanis, hogy a finit matematikának nem-triviális értelmet tulajdoníthassunk, finit eszközökkel ilyen tételeket is be kell tudnunk bizonyítani. Hilbert pontosan ilyen típusú konzisztenciabizonyításokat keresett. A 'finitizmus' kifejezésben a 'finit' is arra utal, hogy nem fogadjuk el a végtelen összességekre való hivatkozásokat.

Tanulmányom első részének célja e kérdés megválaszolása; kifejtem, miképp értelmezhetjük a bizonyítás és a végesség fo-

* Első megjelenése: Finitism. *The Journal of Philosophy LXXVII* (1980). A fordítást a szerző és a *Journal of Philosophy* szíves engedélyével közöljük, ©1980.

[x]Tanulmányom egy korábbi változatát a University of Chicagón 1980 telén tartott matematikafilozófiai szemináriumon mutattam be. John Baldwin, Bill Howard, Phokion Kolaitis és Stanley Tennenbaum konstruktív megjegyzései és izgatott ellenvetései úgy vélem, a tanulmány javára váltak: az érvelések explicitebbek lettek, s immár olyan kérdésekre is kitérek, amelyek eredetileg elkerülték a figyelmemet. Mindennek ellenére nem ringatom magam abban a hitben, hogy egy hasonló közönség előtt a jelenlegi változattal nagyobb sikerem lenne. – Georg Kreisel finitizmussal kapcsolatos nézeteit az alábbiakban éles kritikának vetem alá. Emiatt, ha lehet, még fontosabb, hogy hangot adjak annak, milyen mély hálával tartozom neki a sok éven át folytatott levelezésért és beszélgetésekért, amelyek a matematika filozófiáját illető nézeteimre és ilyen tárgyú munkáimra egyaránt rányomták bélyegüket.

[1] Lásd [Hilbert 1925], [Hilbert 1928], valamint [Hilbert–Bernays 1934].

galmát úgy, hogy a fentihez hasonló univerzális állítások bizonyításához ne kelljen végtelen összességeket tételeznünk. A tárgyalást a finitizmus fogalmának megvilágításával folytatom.

Ezután kimondom és – nagy vonalakban legalább – alá is támasztom azt a tézist, amelyet elsőként néhány évvel ezelőtt[2] vetettem fel, s amely szerint a finit érvelések – a Skolem-féle értelemben véve[3] – primitív rekurzív érvelések. A finitizmus általunk adott analízise nem ebből a tézisből indul ki; éppen ellenkezőleg, a finitizmus mibenlétének megvilágítása jelenti a tézis megalapozását.

Hilbert szemében a finitizmus legfőbb vonzereje a „bizonyosság" („Sicherheit"), ez a magyarázata, hogy a matematika egészét finit alapokra kívánta helyezni; a megalapozás legfőbb eszköze az általa kidolgozott bizonyításelmélet lett volna. A szóban forgó „bizonyosság" forrása Hilbert szerint az a tény, hogy a számok szemléletünkben megjeleníthető objektumok, ellentétben a fügvényekkel, a halmazokkal és más transzfinit objektumokkal, amelyek a tiszta ész ideáinak tekintendők. (Bár Hilbert nem ismerte fel a tiszta ész kanti antinómiáinak valódi jelentőségét, tudott más, erőteljes antinómiákról, amelyeket viszont tévesen éppen a halmazok és függvények ideáinak tulajdonított.)

Mint az közismert, a matematika finit alapokra helyezésének kísérlete egyértelműen kudarcot vallott. Amellett fogok mindazonáltal érvelni, hogy abszolút bizonyosság nem származhat sem finit, sem másféle matematikai érveléstípusból. A finitizmus különleges jelentősége inkább abban keresendő, hogy a finit érvelések nyújtják azt a minimumot, amelyet a számokra vonatkozó valamennyi nem-triviális matematikai gondolatmenetben eleve adottnak tételezünk fel. S éppen emiatt tűnik – karteziánus értelemben – bizonyosnak, hogy nem létezik álláspont, amely szilárdabb, vagy legalábbis ugyanolyan szilárd megalapozással bírna, mint a finitizmus, s amelyről a finitizmussal szemben hatásos érveket hozhatnánk

[2] [Tait 1968].
[3] Lásd [Skolem 1923].

fel. A finitizmus tehát a matematikában valóban alapvető jelentőségű, még ha nem is tekinthető a matematika – hilberti értelemben vett – megalapozásának.

A számok és a transzfinit objektumok közötti, a szemléletben való megjelenítés lehetőségén alapuló episztemikus különbségtétel vonatkozásában amellett érvelek majd, hogy az efféle distinkció nem tartható, de még ha tartható lenne, akkor sem segítene a finit általánosításokra vonatkozó, tanulmányunk elején feltett kérdés megválaszolásában.

A finitizmus tárgyát Hilbert szerint *jelek*, azaz egy véges ábécé karakterkészletéből képzett véges sorozatok képezik. A számok ilyen módon azonosíthatók például az 1, 11, 111 stb. szimbólumokkal. A véges karaktersorozatok a számoknál *prima facie* gazdagabb struktúrát jelentenek, az *abc* és *aab* különböző jelekhez például ugyanaz a szám tartozik. A szintaxis gödeli aritmetizálásával azonban a jelek elmélete a számokéra redukálható, ráadásul olyan – primitív rekurzív – módon, amelyben a finitista sem találhat kivetnivalót. (Látni fogjuk, hogy ezen érvelések finit voltához valóban nem férhet semmi kétség. Tézisünkkel kapcsolatban a valóban érdekes kérdés az, hogy vajon valamennyi finit érveléstípus primitív rekurzív-e.)

A finitizmus tárgyalása során a számfogalom elemzésének kitüntetett jelentősége van. Annak ellenére, hogy a tizenkilencedik század végén és a huszadik század elején többen is megkísérelték, ismereteim szerint senki sem különítette el a számfogalom azon elemeit, amelyek a fenti kérdés megválaszolása szempontjából lényegesek.

A számfogalom megvilágítása tekintetében – Hilbert írásai mellett – Frege, Dedekind és Brouwer munkái a legfontosabbak. Megmutatjuk, hogy az utóbbiakkal éppen az a probléma, ami Hilbert elképzeléseivel. A Frege, illetve Dedekind által a számokra (vagy legalábbis a „szám-szerű" sorozatokra) adott definíció lényegét tekintve halmazelméleti konstrukció, s mint ilyen, kívül esik a finit kereteken. Mint látni fogjuk, az említett definíciók semmiképpen sem kielégítőek.

Meggyőződésem szerint írásom pozitív választ ad arra a Gödel által felvetett kérdésre,[4] hogy vajon képesek vagyunk-e elvi alapon különbséget tenni a finit és az általánosabb értelemben konstruktívnak tekinthető érvelések között. A számokra vonatkozó gondolatmeneteknek egy olyan típusát fogjuk elemezni, amelynek megkülönböztető jegye éppen az, hogy semmiféle végtelen totalitás létét nem előfeltételezik, még az intuicionisták által „potenciálisan" végtelennek nevezett sokaságok létezését sem. A cikkben kifejtettek ráadásul a hilberti állásponttal is meglehetős jó összhangban vannak: a végtelen sokaságok feltevésének elkerülése szempontjából éppúgy, mint az általa finitként hivatkozott példák tekintetében.

A jelen analízis Hilbert álláspontjától egyedül abban tér el, hogy elutasítjuk a kantiánus gyökerű számfogalmat, általánosabban, a szemléletben megjeleníthető jelekre, és az ezektől különböző transzfinit objektumokra – halmazokra és függvényekre – vonatkozó hilberti álláspontot. Ez a felfogás, úgy vélem, koherens módon nem tartható.

I.

A finit érvelések körét nem korlátozzuk a számokra, hanem kiterjesztjük a számokból álló rendezett k-asok körére is. Ennek megfelelően $n : N$ a következőkben azt jelöli, hogy n egy szám, másképp fogalmazva, hogy n egy N *típusú* objektum. Ha a és b rendre A, illetve B típusú ($a : A$ és $b : B$), akkor azt mondjuk, hogy az (a, b) rendezett pár $A \wedge B$ típusú, s ezt így jelöljük: $(a, b) : A \wedge B$.

Elsőfajú finit típusnak nevezzük azokat a típusokat, amelyek N-ből kiindulva az $A \wedge B$ művelettel építhetők fel. A, B és C mindig ilyen típusokat fognak jelölni. Ha a

$$\begin{array}{llll} (a,b,c) & = (a,(b,c)) & A \wedge B \wedge C & = A \wedge (B \wedge C) \\ (a,b,c,d) & = (a,(b,c,d)) & A \wedge B \wedge C \wedge D & = A \wedge (B \wedge C \wedge D) \end{array}$$

[4] Lásd [Gödel 1958].

(stb.) konvenciókat alkalmazzuk, akkor egy számokból álló rendezett k-ast $N \wedge \cdots \wedge N$ típusú $(m, \ldots, n)$ objektumnak tekinthetünk (k tényezővel).

Vizsgáljuk meg először, mit is jelent, hogy f a $\forall x F(x)$ formula egy finitista bizonyítása – jelekben: $f : \forall x F(x)$ –, ahol x valamilyen A típusú változó, $F(x)$ pedig olyan egyenlőség, amely – valamely adott B típusba tartozó – terminusok között áll fenn.

Nyilvánvaló, hogy elemzésünk eredményétől függetlenül teljesülnie kell a következőnek: ha f ilyen bizonyítás és $a : A$, akkor f alapján meg kell kapnunk $F(a)$ egy fa bizonyítását, azaz $fa : F(a)$. (Mivel $F(a)$ konstans terminusok közötti egyenlőség, bizonyítása egyszerűen egy számolás elvégzése, s mint ilyen, problémamentes.) E követelmény összhangban áll azzal a finitista elvvel, mely szerint egy univerzális állítás bizonyítása olyan séma, amelynek segítségével a szóban forgó állítás valamennyi instanciája bizonyítható.

Megfordítva, ésszerűnek tűnhetne, hogy ha f minden $a : A$ objektumhoz hozzárendeli az $F(a)$ állítás egy bizonyítását, akkor f-et $\forall x F(x)$ bizonyításának tekinthetjük. Ezzel az elképzeléssel szemben azonban finitista álláspontról két ellenvetés is megfogalmazható. Az elsőhöz tegyük fel, hogy a Zermelo–Fraenkel-féle halmazelmélet (*ZF*) konzisztens. E tény kifejezhető (kódolható) olyan $\forall x F(x)$ univerzális állítással, amelyben az x változó N típusú, az $F(n)$ állítás pedig minden $n : N$ esetén bizonyítható. Legyen fn az $F(n)$ állításnak – mondjuk – a legkisebb Gödel-számú bizonyítása. Így definiáltuk *ZF* konzisztenciájának egy „bizonyítását", de ez aligha finit bizonyítás. Másodszor, a mondottak szerint egy ilyen f bizonyítás olyan függvény, amely valamennyi $a : A$ esetén értelmezve van, s mint ilyen, transzfinit objektum.

A bizonyítás fogalmával kapcsolatos nehézségek azonban már az $F(x)$ formula finitista értelemzése kapcsán fölmerülnek. Példának okáért ebben a formulában előfordulhat az összeadás $+$ jele – mint az eredetileg hivatkozott példánkban is történt. Milyen értelmet tulajdoníthat vajon a finitista e szimbólumnak, amely egy – minden számpáron értelmezett – numerikus függvényt jelöl? Elismerjük: a finit függvények problémáját a finit bizonyítások értelmezése során akár figyelmen kívül is hagyhatnánk. Elemzésünket azért kezdjük mégiscsak ezzel, mert megoldása közvetlenül elvezet a finit bizonyítás problémájának megoldásához. Az $f : A \to B$ jelölés azt rövidíti, hogy f A-n értelmezett, B-be érkező függvény, más szóval, hogy f valamennyi $a : A$ objektumhoz egyértelműen hozzárendel egy $fa : B$ objektumot.

Mit is állítunk, amikor azt mondjuk, hogy f finit függvény? Először is világos, hogy kérdésünknek a finitista szemében nincs értelme, mivel az általános függvényfogalomnak sincs. Nem vállalkozhatunk tehát többre, mint hogy megadjuk a finit függvény és a finit bizonyítás fogalmának értelmezését – *nem finitista* alapon.

Első közelítés gyanánt ígéretesnek tűnik a meghatározás, miszerint a finit függvények a számítási szabállyal, azaz a függvényértékek kiszámítására alkalmas algoritmussal megadható függvények. Az algoritmusok azonban szigorúan véve nem finit objektumok: igaz ugyan, hogy megadhatók egy jelsorozattal, e jelsorozatot azonban ki is kell tudnunk olvasni, az tehát nem pusztán szintaktikai, hanem jelentéssel bíró objektum. Nem kell persze feltétlenül elfogadnunk, hogy minden algoritmus transzfinit objektum. De ha e kérdést átmenetileg félretesszük, a függvény algoritmusként való meghatározása akkor is további finomítást igényel, ami már annak alapján is nyilvánvaló, hogy amennyiben ZF konzisztens, úgy e tény fent megadott „bizonyítását" ugyancsak egy algoritmussal értelmeztük. A hiányzó láncszemet az jelenti, hogy finitistaként azt is látnunk kell, hogy az algoritmus működik, azaz minden A-hoz egyértelműen hozzárendel egy B-t. Ha eltekintünk az egyértelműségtől, követelményünk a következő logikai formát ölti: $\forall x \exists y G(x, y)$, ahol $G(x, y)$ azt rövidíti, hogy y egy érték kiszámítása x-ből. Ezt az állítást azonban a finitista nem értelmezheti másképp, mint hogy megadható egy g függvény, amelyre $\forall x G(x, gx)$ teljesül. A függvény algoritmusként való értelmezése tehát visszakanyarodott a függvény és az univerzális állítás fogalmához: az érvelés körben forgó.

Meggyőződésem szerint e körforgás kényszerítő erővel maga után von több következtetést is. Először, azok a kísérletek, amelyek a függvény konstruktív definícióját a kiszámíthatóság fogalmára vezetik vissza, s amely kísérletekkel az irodalomban gyakran találkozunk, egytől-egyig elhibázottak. A függvényfogalom primitív fogalom. Másodszor, a konstruktív és a nem-konstruktív közötti különbség nem arra vonatkozik, hogy milyen objektumok képezik érvelésünk tárgyát, hanem éppenséggel ezen érvelések típusaira. Végül a konstruktív függvények kiszámíthatósága tétel, nem pedig definíció: a kiszámíthatóság olyan sajátossága a szóban forgó függvényeknek, amellyel éppen azáltal rendelkeznek, hogy konstruktív módon lettek meghatározva.

A jelen tanulmány szempontjából e kérdések korántsem jelentőség nélküliek, részletes tárgyalásukat mégis elhalasztom. E helyütt csupán azt kívánom leszögezni, hogy a függvények nem értelmezhetők véges objektumokként, olyan módon legalábbis semmiképpen, hogy abban a finitista ne találhasson semmi kivetnivalót.

Miként értelmezheti tehát a finitista azt, hogy $f : A \to B$? Biztosan nem azon állításként, mely szerint f egy A-n értelmezett, B-be érkező függvény. Értheti azonban annak a ténynek a rögzítéseként, hogy rendelkezésére áll egy speciális eljárás, amelynek alapján *tetszőleges A-ból kiindulva definiálhat egy B-t*, másképpen mondva, hogy tetszőleges A-ból *konstruálhat* egy B-t. Az itt szereplő 'konstruál' kifejezést semmiképpen sem szabad olybá vennünk, mintha valamiféle fizikai vagy mentális értelemben vett létrehozást vagy alkotást jelentene. Az általunk használt terminológia más vonatkozásban is kissé félrevezető: mint arra már Frege is rámutatott, olyasmi, mint egy „tetszőleges A", egyszerűen nem létezik. Azt sem akarjuk, hogy a tetszőleges A-ból kiinduló B-konstrukció a következő univerzális állítást fejezze ki:

(1) $$\forall x : A(fx : B),$$

az univerzális állítás finit bizonyításának fogalmát ugyanis a finit függvény fogalmára kívánjuk visszavezetni. Azokban az esetekben viszont, amikor egy állítás bizonyítható, ésszerű, ha meg is követeljük a bizonyítást. Ha tehát nem akarunk végtelen regresszussal szembesülni, akkor léteznie kell olyan konstrukcióknak, amelyek esetében nincs értelme megkövetelni a megfelelő (1) típusú állítás – a szóban forgó konstrukción túlmenő – bizonyítását. Kizárólag ezekben az esetekben fogjuk azt mondani, hogy tetszőleges A alapján konstruálhatunk egy B-t.

A tény, hogy ilyen konstrukciók léteznek, vagyis hogy nincs végtelen regresszus s a bizonyításoknak igenis van kiindulópontja, azon alapul, hogy C-nek lenni *annyit tesz*, mint bizonyos módon konstruáltnak lenni. Először tehát, B-nek lenni is annyit jelent, mint bizonyos módon konstruáltnak lenni, talán éppen egy A-ból. Másodszor, annak alapján, ahogy egy A-t konstruálunk, más konstrukciók is megadhatók, talán éppen egy B-é.

A konstrukció fogalmának elemzését tovább csak úgy finomíthatjuk, ha figyelmünket a finit típusokra, különösképpen a számokra összpontosítva, megvizsgáljuk, hogy ezekre miként alkalmazható. Mindenképpen megjegyzendő, hogy elemzésünkben semmi nincs, ami specifikusan finitista lenne. Későbbi tanulmányokban a konstrukció fogalmát ki fogom terjeszteni olyan nem finit kontextusokra, amelyekben már transzfinit objektumok – függvények és transzfinit típusok – is szerepelhetnek. Ilyen kontextusban megeshet, hogy valamely konstrukció, amely egy tetszőleges A-ból kiindulva egy B-t eredményez, nem finit, holott A is és B is az. (Ennek alapján viszont az a – nézetem szerint helytálló – tanulság kínálkozik, hogy a konstruktív függvény és a konstruktív bizonyítás fogalma még a finit típusok és állítások körében sem abszolút, hanem mindig relatív: az éppen vizsgált típusoktól és objektumoktól függ. E két fogalom csak úgy lehetne abszolút, ha előzetesen rendelkezésünkre állna *valamennyi* lehetséges típus jellemzése.) Célunk e helyütt nem több, mint azt megmutatni, hogy a C-k és speciálisan a számok ideája nem előfeltételezi a transzfinit objektumokra való hivatkozást, pontosabban azt, hogyan értelmezhetők ezek a fogalmak ilyen hivatkozás nélkül. Vizsgálódásainkat a számfogalom elemzésével kell kezdenünk.

II.

Véges sorozatokkal gyakran találkozunk: nyomtatott oldalakon szavak sorakoznak, a harang ütései egymást követik, a szobában jelen lévő emberek – kor vagy testmagasság szerint, vagy egyszerűen a számlálás rendjében – sorba állíthatók. E sorozatokat nem csupán észleljük, de *sorozatként* észleljük, olyasmiként tehát, ami a véges sorozat *formájával* rendelkezik. E formára vagy *ideára* a *Szám* néven fogok hivatkozni.

A *Szám* tehát a szó hétköznapi értelmét követi. Ha a *számosság* értelmében akarjuk használni, csupán annyit kell tennünk, hogy a 'véges sorozat' kifejezést mindenütt a 'véges halmaz' fordulattal helyettesítjük, ez azonban semmi lényeges különbséget nem jelent.

A *Szám*-formának több részformája is van, mint amilyen például a páros vagy a négyzetszám. A minimális, azaz legteljesebben meghatározott ilyen részforma a *számok* részformája. A 0 az üres sorozat, 1 az egytagú sorozat formája, s így tovább. A *Szám* és a *számok* viszonya tehát nem a fogalom és a fogalom alá eső objektum, hanem egy struktúra formája és e forma legkisebb, specifikus részformája közötti viszony.

A *Szám* ideájának megértése során nem a számfogalomból indulunk ki, nem abból tehát, hogy mit is jelent, ha valami szám. A helyzet inkább fordított. A számokat a *Szám* speciális meghatározásaként értelmezzük. Az

1111111111111111111

karakterláncot például előbb észleljük véges sorozatként, s csak azután számolunk, s állapítjuk meg a neki megfelelő számot. Ha a dolog fordított lenne, mi lenne a számlálás? Képesek vagyunk arra, hogy a fenti karakterláncot tizenkilenc egységből állóként azonosítsuk. Azt viszont, hogy sorozat, sokféleképpen felismerhetjük. Megfelelő értelmezést, például valamilyen konvenciót követve akár tetszőleges számú egység sorozatának is tekinthetjük, sőt, bármelyik esetben több lehetőség közül is választhatunk. $n+2$ értelmezése ugyancsak nem a kifejezés végtelen sok instanciája, azaz $0+2$, $1+2$ stb. megragadásán alapul. A döntő sokkal inkább annak megértése, mit jelent, ha egy sorozatot úgy kapunk meg, hogy egy másik sorozathoz két újabb tagot veszünk hozzá.

Ezt az értelmezést követve bármely szám mibenlétét megragadhatjuk, anélkül, hogy végtelen totalitásokra kellene hivatkoznunk. Figyelmünk középpontjában a véges sorozat generikus formája, a *Szám* áll. Véges sorozatokkal minduntalan találkozunk a mindennapi gyakorlat során, általánosabb értelmét a *Szám* ennek alapján nyeri el: ez a forrása annak, hogy képesek vagyunk a számfogalmat alkalmazni. A *Szám* azonban rendelkezik egy tisztán formális jelentéssel is (amit a IV. szakaszban tárgyalunk majd). A számfogalom éppen emiatt alkotja a matematika tárgyát (ellentétben például mozgás ideájával, amelynek eredete szintén tapasztalati gyökerű struktúra).

Ezt az értelmezést, amelyben tehát egy tetszőleges szám megértéséhez nem kell végtelen sokaságokat tételeznünk, kiterjeszthetjük valamennyi elsőfajú finit típusra. Egy tetszőleges $A \wedge B$-hez elvégre nem kell más, mint egy tetszőleges A és egy tetszőleges B.

III.

Rátérünk annak a kérdésnek a tárgyalására, hogy milyen $f : A \to B$ konstrukciókat fogadhatunk el finitista alapon.

Tegyük fel először, hogy a $g : A \to B$ és a $h : B \to C$ konstrukciókat már értelmeztük. Akkor az $fa \equiv h(ga)$ összefüggés egyértelműen meghatároz egy $f : A \to C$ konstrukciót, amelyet g és f *kompozíciójának* nevezünk (... $\equiv$ ... jelentése: ... definíció szerint egyenlő ... -val.) A kompozíció elve nem függ attól, hogy tudjuk-e, milyen természetűek az A, B és C típusok. Egyedül annyit kell észrevennünk, hogy amennyiben tetszőleges $b : B$ esetén $hb : C$, úgy $hb : C$ fennáll akkor is, amikor $b = ga : B$.

Két további típusfüggetlen konstrukció is létezik. Az A-n értelmezett $f : A \to A$ *identitásfüggvény* az $fa \equiv a$, a b értékű $f : A \to B$ *konstans függvény* az $fa \equiv b$ összefüggéssel értelmezhető. A finit típusok körében, mint azt hamarosan látni fogjuk, az identikus és a konstans függvények másféle konstrukciók alapján is megkaphatók.

Ha $g : A \to B$ és $h : A \to C$, akkor az $fa \equiv (ga, ha)$ összefüggés egy $f : A \to B \wedge C$ konstrukciót definiál, amelyet g és h *párosításának* nevezünk. Az $f : B \wedge C \to B$ és $f : B \wedge C \to C$ projekciókat pedig rendre $f(b, c) \equiv b$, illetve $f(b, c) \equiv c$ definiálja. Világos, hogy e konstrukciók impliciten már $B \wedge C$ értelmezésében benne foglaltatnak, s hogy a nekik megfelelő (1) alakú állítások nem bizonyíthatók anélkül, hogy magukra a konstrukciókra hivatkoznánk.

Megmutatható másfelől, hogy az imént definiált konstrukciók minden olyan $A \to B$ függvény definíciójához elegendők, amelynek N jelentésétől függetlenül is „léteznie kell". A pontosabb értelmezéshez jelöljenek $P, Q, \ldots$ tetszőleges típusokat. Minden P atomi típusban bevezethetünk néhány P típusú p konstanst (ezek száma lehet 0 is). Jelöljenek továbbá A, $B, \ldots$ ezen atomi típusokból a $\wedge$ operációval képzett típusokat. Valamennyi A, B pár esetén rögzíthetünk $A \to B$ típusú f függvénykonstansokat (amelyek száma szintén lehet 0 is). Ezek után egy * modell megadása annyit jelent, hogy minden atomi P típushoz hozzárendelünk egy konkrét P^* típust, minden P típusú p konstanshoz egy $p^* : P^*$ objektumot, s minden $f : A \to B$ típusú függvénykonstanshoz egy $f^* : A^* \to B^*$ függvényt. Nevezzük végül a $g : A^* \to B^*$ függvényt * *vonatkozásában konstruktív függvénynek*, ha megkapható kompozíció és párosítás révén az identitásfüggvényekből, a $ha = p^*$ összefüggéssel megadott $h : A^* \to P^*$ konstans függvényekből, valamint az f^* függvényekből és a projekciókból kiindulva. Nevezzük a $^+$ modellt a * modell részmodelljének, ha minden atomi P típus tekintetében fennáll $P^+ \subseteq P^*$, minden p konstans esetén $p^+ = p^*$, továbbá minden $f^+ : A^+ \to B^+$ függvény a megfelelő $f : A^* \to P^*$ függvény A^+-ra való leszűkítése. Könnyen bizonyítható, hogy

> minden * modellnek létezik egy legkisebb $^+$ részmodellje, s e modellben minden $g : A^+ \to B^+$ függvény konstruktív.

A gondolatmenet természetesen nem finitista. Annyit azonban kétségkívül megmutat, hogy minden olyan $f : A \to B$ függvény, amely a finitista által elfogadható, s amelynek értelmezésekor a számfogalomra nem kell hivatkoznunk, megkapható a fenti konstrukciók alapján.

IV.

Melyek tehát azok a konstrukciók, amelyek impliciten jelen vannak a *Szám* ideájában? Minden véges sorozat megkapható az üres sorozatból, az egy taggal való bővítés műveletét iterálva, tehát bármely szám elérhető 0-ból, ha a rákövetkező képzésének $m \mapsto m'$ műveletét iteráljuk. Fontos azonban, hogy lássuk: ezzel a véges sorozat vagy a szám fogalmát *nem vezettük vissza* nem-triviális módon egyszerűbb fogalmakra. Az iteráció fogalmára kell ugyanis hivatkoznunk: ha az n számhoz a 0-ból kiindulva akarunk eljutni, az $m \mapsto m'$ műveletet n-szer kell iterálnunk. Amennyiben a *Szám* ideájával nem vagyunk tisztában, akkor az iterációval sem.

Iménti megfontolásaink – még ha az iterációt ideiglenesen figyelmen kívül hagyjuk is – közvetlenül elvezetnek két konstrukcióhoz: $fn \equiv 0$ definiálja az $f : N \to N$ konstans 0 függvényt, $fn \equiv n'$ pedig az $f : N \to N$ rákövetkezőfüggvényt. (A $ga \equiv b$ definícióval meghatározott $g : A \to B$ konstans függvények mind megkaphatók a 0 és a rákövetkezőfüggényből kiindulva, párosítás, projekciók és kompozíciók segítségével.)

Ha most az iterációt is tekintetbe vesszük, eljutunk egy finit konstrukcióhoz, amely nélkülözhetetlen a nem-triviális matematikához. Legyen adott $k : B$, $g : B \to B$ és $n : N$. Az n szám megkapható 0-ból az $m \mapsto m'$ műveletet iterálva:

$$0, 1, 2, \ldots, n = 0^{''\cdots'}.$$

Pontosan ugyanezen iteráció alapján, ugyanúgy értve a kipontozást, értelmezhetünk egy $fn : B$ objektumot is:

$$k,\ gk,\ ggk,\ ggk,\ \ldots\ ,\ fn = g \ldots ggk.$$

E konstrukciót az

$$f0 \equiv k \qquad fn' \equiv g(fn)$$

egyenlőségekkel adhatjuk meg, s azt mondjuk, hogy az $f : N \to N$ függvényt a k és a g alapján *primitív rekurzióval* definiáltuk.

Legyen például $g : N \to N$ a rákövetkezőfüggvény, akkor az

$$f0 \equiv 0 \qquad fn' \equiv g(fn)$$

egyenlőségek az $f : N \to N$ identikus leképezést definiálják. Az $f : A \to A$ identitások – tetszőleges A típus esetén – ebből kaphatók meg projekciók és párosítások alapján.

Legyen

$$k : A \to B \qquad g : A \wedge B \to B.$$

Akkor tetszőleges $a : A$, $ka : B$ és $g(a, \cdot) : B \to B$ esetén a fenti konstrukciót követve definiálhatjuk k-ból és g-ből primitív rekurzióval az $f : A \wedge N \to B$ függvényt; e konstrukciót az alábbi egyenlőségekkel írhatjuk le:

$$f(a, 0) \equiv ka \qquad f(a, n') \equiv g(a, f(a, n)).$$

Fontos, hogy lássuk: *ezek az egyenlőségek a finitista számára nem bírnak a priori jelentéssel.* A klasszikus matematika szerint f implicit definíciójának tekinthetők. A finitista azonban elutasítja az általános függvényfogalmat, számára az egyenlőségek csupán annak a konstrukciónak a rövid leírását adják meg, amely megmutatja, miként kapható meg ka-ból (illetve k-ból) $g(a, \cdot)$ (illetve g) segítségével $f(a, n)$ (illetve f). A finitista is látja azonban, hogy $n \neq 0$ esetén $f(a, n)$ konstrukciója visszavezethető $f(a, n \dot{-} 1)$ konstrukciójára, miként azt is, hogy az n, $n \dot{-} 1, \ldots$ sorozat 0-val végződik:

$$n, n \dot{-} 1, \ldots, 1, 0,$$

elvégre jobbról balra olvasva ez pontosan az a sorozat, amelyet 0-ból kiindulva az $m \mapsto m'$ művelet ismétlésével kapunk. Ez az alapvető tény a véges sorozat fogalmának konstitutív alkotórésze. Nincs értelme rákérdezni, miben áll e tény bizonyítása. S valóban, ha matematikailag akarjuk megragadni, kikerülhetetlen a primitív rekurzió alkalmazása. Az n szám $hn \equiv n \dot{-} 1$ megelőzőjét primitív rekurzív módon a következő egyenlőségekkel értelmezzük:

$$h0 \equiv 0 \qquad hn' \equiv n.$$

Primitív rekurzióval adható meg a h függvény k-adik iteráltja is:

$$h^0 n \equiv n \qquad h^{k'} n \equiv h(h^k n).$$

Állításunk szerint mármost $h^n n = 0$. Ennek bizonyítása azonban megint nem megy másképp, mint egy – ezúttal a matematikai indukció formáját öltő – primitív rekurzív gondolatmenet alapján. (Lásd tanulmányunk VI. szakaszát.)

V.

A projekciókból, a 0 konstans és a rákövetkezőfüggvényből kiindulva a kompozíció, a párosítás és a primitív rekurzió révén megkapható függvényeket *primitív rekurzív függvényeknek* nevezzük. Az előzőek során amellett érveltünk, hogy valamennyi ilyen $f : A \to B$ függvény finit – abban az értelemben, hogy a finitista számára is elfogadható, mint olyan konstrukció, amelynek alapján tetszőleges A-ból egy B-t kaphatunk meg.

> TÉZIS – A finit függvények pontosan a primitív rekurzív függvények.

Tézisünk a finitista számára természetesen értelmezhetetlen, elvégre a finit függvény fogalma nem finit fogalom. De akkor sem reménykedhetünk abban, hogy sikerül a tézist szigorúan bizonyítanunk, ha nem korlátozódunk a finit gondolatmenetekre, a finitizmus Hilbert általi meghatározása ugyanis ehhez nem elég precíz. A helyzet inkább Church téziséhez hasonló, amely szerint a kiszámítható numerikus (azaz $N \to N$) függvények pontosan az általános rekurzív függvények. Ha tehát egy finit függvény megadása elfogadható, mindazonáltal nem primitív rekurzív konstrukciónak tűnik, akkor meg kell tudnunk mutatni: vagy arról van szó, hogy a szóban forgó függvény az elmondottak értelmében nem finit függvény, vagy arról, hogy az illető konstrukció végeredményben mégiscsak primitív rekurzív.

Vizsgáljuk meg, miként értelmezhetünk egy $f : A \to B$ finit függvényt, azaz miként adhatunk meg egy konstrukciót, melyet követve tetszőleges $a : A$-ból egy $fa : B$-t kapunk.

Előfordulhat, hogy fa-t egyszerűen az a, illetve már adott $fa \equiv t$ függvények alapján határozzuk meg, ahol t olyan B típusú terminus, amelyet a és már korábban értelmezett függvények alapján definiáltunk. A primitív rekurzív függvények köréből azonban az efféle explicit definíciók nem vezetnek ki, ilyen konstrukció tehát nem szolgálhat ellenpéldával tézisünkre. (S valóban, f konstruálható függvény – az adott függvények alapján, a III. szakasz végén mondottak értelmében.)

Az is megeshet, hogy fa konstrukciója során a-ból, adott függvényekből és esetleg további meghatározott ft terminusokból indul ki, ahol t olyan A típusú terminus, amelyet a, már definiált függvények, és – esetleg – további fs terminusok alapján definiáltunk. Ilyen konstrukciót fejeznek ki például az

$$fa_0 \equiv b_0 \qquad fa \equiv g(f(ha))(a \neq a_0)$$

egyenlőségek, amelyekben $a_0 : A$ és $b_0 : B$ rögzített terminusok. A primitív rekurzióra adott első példánk éppen ilyen alakú, a_0 helyébe 0-t, h helyébe pedig a megelőzőfüggvényt írva.

Az f-re vonatkozó egyenlőségeket, miként a primitív rekurzió kapcsán már említettük, a finitista nem értelmezheti betű szerint fa definíciójaként (ahol $a \neq a_0$). Sokkal inkább úgy tekinti, mint annak a konstrukciónak a rövidített leírását, amelyet követve fha alapján megkaphatjuk fa-t. Ha viszont $a \neq a_0$, akkor fha definíciójában $fhha = fh^2a$, ez utóbbi definíciójában pedig $fhh^2a = fh^3a$ szerepel, s így tovább. Ahhoz tehát, hogy konstrukciónk jól definiált legyen, azt kell látnunk, hogy minden $a : A$ esetén van olyan n, amelyre $h^n a = a_0$ [ahol $h_0 a \equiv a$ és $h^{n'} = h(h^n a)$]. A finitista számára ez sem több-bet, sem kevesebbet nem jelent, mint hogy adott számára egy

$k : A \to N$ függvény, amelyre belátta, hogy $\forall x : A(h^{kx}x = a_0)$. Az eredeti f függvényt azonban g, h és k alapján primitív rekurzióval definiáltuk, s ugyanez k-ra is áll, azaz k is definiálható g, h, valamint a projekciók, a konstans 0 és a rákövetkezőfüggvényből kiindulva kompozíció, párosítás és primitív rekurzió alapján. A primitív rekurzív függvények köréből tehát e konstrukció sem vezethet ki.

Fenti példánk kétségkívül egyszerű. Az fa definíciójában szerepelhetne például olyan ft terminus, hogy az abban szereplő t definíciójában maga az f függvény is megjelenik. Az efféle esetekben az elemzés lényegében ugyanaz: a konstrukció csupán akkor fogadható el, ha meg tudunk adni olyan $k : A \to N$ függvényt, hogy ka éppen az fa függvényérték kiszámításához szükséges visszavezetési lánc hosszát határozza meg. Az f függvény ezután k és a többi megadott függvény alapján primitív rekurzióval definiálható.

Előfordulhat az is, hogy két függvényt, mondjuk g-t és h-t úgy határozunk meg, hogy g definíciójában h-ra, h definíciójában viszont g-re hivatkozunk. Ez azonban az $fa = (ga, ha)$ függvény bevezetésével egyetlen függvény definíciójára redukálható, amelyből g és h projekciók és kompozíció segítségével kapható meg.

VI.

Rátérhetünk immár az univerzális állítások finit bizonyításának problémájára.

Az univerzális állítások egy típusával már találkoztunk: azzal, amelynek formája $f : A \to B$. A bizonyítás kérdése itt fel sem merült: azt, hogy $fa : b$, maga a konstrukció bizonyította, amelynek alapján a-ból megkaptuk fa-t.

A C típusú terminusok induktív definíciója a következő. 0 és a változók mind N típusúak. Ha a t terminus N típusú, akkor t' is az. Amennyiben az s terminus A, t pedig B típusú, úgy az (s, t) terminus $A \wedge B$ típusú. Ha f egy $A \to B$ primitív rekurzív függvényt jelöl, t pedig A típusú terminus, akkor az ft terminus B típusú. Azokat a t terminusokat, amelyekben nem fordul elő változó, *zárt* terminusnak nevezzük. [Figyeljünk fel arra, hogy a tárgynyelvben ugyanazon 0, ′, (–, –) és f jelöléseket használjuk, mint amelyeket a metanyelvben, amikor terminusokról, számokról, párokról stb. beszélünk.]

Finitistaként minden B típusú zárt terminusról látjuk, hogy valóban B típusú objektumot jelöl. Általánosabban, ha a B típusú $t(x)$ terminusban szereplő változók mindegyike változók egy m hosszúságú x sorozatának eleme, továbbá $A = N \wedge \cdots \wedge N$ (ahol az N m-szer szerepel), akkor – finitista szemmel is – felismerhető, hogy $t(a)$ tetszőleges $a : A$ esetén B típusú terminust jelöl, ahol $t(a)$ az a terminus, amelyet úgy kapunk, hogy az x-beli i-edik változó valamennyi $t(x)$-beli előfordulását az a terminus i-edik elemét képező számjellel helyettesítjük. S valóban, mint azt már korábban megállapítottuk, az $f(a) \equiv t(a)$ formula egy $f : A \to B$ primitív rekurzív függvényt definiál. Azonban finitistaként nem áll módunkban, hogy valamely adott típus *valamennyi* zárt terminusáról egyszerre lássuk, hogy megfelelő típusú objektumot jelöl. Ehhez ugyanis a kompozícióra, a párosításra és a primitív rekurzióra úgy kellene tekintenünk, mint a függvényekre *általános érvénnyel* alkalmazható operációkra – a függvény fogalma azonban finitista alapon nem ragadható meg. A finitista kizárólag az egyedi esetek érvényességét képes megállapítani. Ellenkező esetben finit függvény lenne még az a függvény is, amely minden N típusú zárt terminus Gödel-számához az illető terminus értékét, s valamennyi olyan számhoz, amely egyetlen N típusú terminusnak sem Gödel-száma, a 0-t rendeli. Mivel e függvény nem primitív rekurzív, ellentmondásba kerülnénk tézisünkkel.

Ugyanezen okból a finitista nem rendelkezik a – valamely B típusba tartozó – terminusok egyenlőségének általános fogalmával sem. Megérti viszont, hogy mit jelent $s = t$, ha adva van két ilyen terminus, t és s. Jelentse $p : s = t$ azt, hogy p az $\bar{s} = \bar{t}$ egyenlőség formális levezetése – ahol $\bar{s}$ és $\bar{t}$ rendre az s és a t terminusok értékei –, amelyben az alábbi levezetési szabályok szerepelnek:

$$\text{(i)}\quad 0 = 0$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{m = n}{m' = n'}$$

$$\text{(iii)}\quad \frac{a = a_0 \qquad b = b_0}{(a, b) = (a_0, b_0)}$$

Jegyezzük meg, hogy legfeljebb egy $p : s = t$ létezik. $p : s = t$ jelentése alapján nyilvánvaló, hogy van olyan f_0 és f_1, amellyel

$$\begin{aligned} &f_0 : 0 = 0 \text{ és} \\ &f_1 : s = t \to s' = t' \end{aligned}$$

valamennyi N típusú s és t terminus esetén. $f_1 p : s' = t'$ (ii) alapján kapható meg $p : s = t$-ből. Továbbá – lévén $\overline{s'} = \overline{t'}$ nem más, mint $\overline{s}' = \overline{t}'$ –, ha $q : s' = t'$, akkor q-t csak (ii) szerint kaphattuk meg, valamely $p : s = t$ alapján. Van tehát olyan f_2, amelyre

$$f_2 : s' = t' \to s = t.$$

Kiindulva abból, hogy $\overline{(a, b)} = (\overline{a}, \overline{b})$, (iii) alapján ugyanezen gondolatmenetet követve kapjuk f_3-at, f_4-et és f_5-öt:

$$\begin{aligned} &f_3 : (s = u) \,\&\, (t = v) \to (s, t) = (u, v) \\ &f_4 : (s, t) = (u, v) \to s = u \\ &f_5 : (s, t) = (u, v) \to t = v \end{aligned}$$

Az $\equiv$ szimbólum jelentése alapján kapjuk meg a következő két konstrukciót. Amennyiben $fa \equiv t(a)$ a primitív rekurzív $f : A \to B$ függvényt definiálja, továbbá s egy A, u pedig egy B típusú zárt terminus, akkor megint ugyanazon konstrukciót követve – és figyelembe véve, hogy $\overline{fs}$ és $\overline{t(s)}$ megegyezik – kapjuk f_6-ot és f_7-et:

$$\begin{aligned} &f_6 : t(s) = u \to fs = u \\ &f_7 : f(s) = u \to t(s) = u \end{aligned}$$

Tehát $f_6 p = f_7 p = p$. (Az $s = t$ és a $t = s$ egyenlőségeket nem tekintjük különbözőnek, ellenkező esetben f_6-hoz és f_7-hez egy további levezetési szabályra is szükségünk lenne.)

Az f_6 és az f_7 konstrukció a bennük szereplő s, t stb. terminusoktól függ. Ugyanezen konstrukciók azonban tetszőleges $a : A = N \wedge \cdots \wedge N$ (ahol az N m-szer szerepel) esetén érvényesek az $s(a)$, $s(t)$ stb. terminusokra, ahol az $s(x)$, $t(x)$ stb. terminusokban pontosan m különböző x változó fordul elő.

Mindezen előkészületek után rátérhetünk annak tárgyalására, hogy miben is áll egy univerzális állítás finit bizonyítása.

Legyen x olyan m hosszúságú sorozat, amelynek tagjai egymástól különböző változók; jelöljenek $F(x)$, $G(x)$ és $H(x)$ olyan kifejezéseket, amelyeket $\wedge$ segítségével kapunk olyan $s(x) = t(x)$ egyenlőségekből, amelyekben $s(x)$ és $t(x)$ azonos típusú terminusok, s a bennük szereplő valamennyi változó az x sorozat tagja. Az $F(a)$ kifejezések, ahol $a : A = N \wedge \cdots \wedge N$ (ahol az N m-szer szerepel), alkotják a *másodfajú finit típusokat*. Mivel már tudjuk, miként értelmezzük azt, hogy $p : s(a) = t(a)$, továbbá hogy $p : F(a) \wedge G(a)$ annyit jelent, hogy $p = (q, r)$ valamilyen $q : F(a)$ és $r : G(a)$ mellett, azzal is tisztában vagyunk, mit jelent $p : F(a)$ bármely másodfajú finit típus esetén.

Már rámutattunk: $f : \forall x F(x)$ azt kell jelentse, hogy $fa : F(a)$ tetszőleges $a : A$ esetén. Figyelembe kell vennünk azonban az

$$(2) \qquad f : \forall x(F(x) \to G(x))$$

alakú *hipotetikus bizonyításokat* is. Itt tehát tetszőleges $a : A$ és $p : F(a)$ esetén $f(p, a) : G(a)$. Mint az $f : A \to B$ esetben, a finitista számára (2) is csupán azt a tényt fejezi ki, hogy tetszőleges $a : A$ és $p : G(a)$ alapján megkonstruáltuk $f(a, p) : G(a)$-t.

Figyeljünk fel arra, hogy mást jelent, ha egy tetszőleges $a : A$-ról, és mást, ha egy $p : F(a)$-ról beszélünk.

Az $a : A$ terminusokból végtelen sok létezik, míg $p : F(a)$ vagy létezik, vagy nem – ha azonban létezik, akkor egyértelműen. Ettől függetlenül az, hogy mi tekinthető $p : F(a)$-nak, pontosan meghatározott, s annak feltételezése, hogy ilyen p rendelkezésünkre áll, megfelelő kiindulási alap további konstrukciókhoz, mint amilyen például a fentebb tárgyalt f_0–f_7.

A kérdés mármost az, hogy a finitista milyen (2) formájú hipotetikus bizonyításokat fogadhat el. Láttuk, hogy f_0–f_7 alapján ilyen bizonyításokat kapunk:

$$f_0 : \forall x(0 = 0),$$
$$f_1 : \forall x(s(x) = t(x) \rightarrow s(x') = t(x')),$$

s így tovább. Ezeken kívül rendelkezésünkre állnak az elsőfajú finit típusok esetében sorra vett konstrukciók megfelelői:

Kompozíció ($\rightarrow$ tranzitivitása):
Ha $g : \forall x(F \rightarrow G)$ és $h : \forall x(G \rightarrow H)$, akkor $f(a, p) \equiv h(a, g(a, p))$ egy $f : \forall x(F \rightarrow H)$ konstrukciót definiál. [A könnyebb olvashatóság kedvéért az $F(x)$ kifejezés helyett egyszerűen F-et stb. írunk.]

Azonosság (a hipotézis törvénye):
$f(a, p) \equiv p$ egy $f : \forall x(F \rightarrow F)$ konstrukciót definiál.

Párosítás ($\wedge$-bevezetés):
Ha $g : \forall x(F \rightarrow G)$ és $h : \forall x(F \rightarrow H)$, akkor $f(a, p) \equiv (g(a, p), h(a, p))$ egy $f : \forall x(F \rightarrow G \wedge H)$ konstrukciót definiál.

Projekció ($\wedge$-kiküszöbölés):
$f(a, (p, q)) \equiv p$ és $f(a, (p, q)) \equiv q$ rendre $f : \forall x(F \wedge G \rightarrow F)$ és $f : \forall x(F \wedge G \rightarrow G)$ konstrukciókat definiálnak.

Primitív rekurzió (matematikai indukció):
Ha $g : \forall x(F \rightarrow G(0))$ és $h : \forall xz(G(z) \rightarrow G(z'))$, akkor $f(a, 0, p) \equiv g(a, p)$ és $f(a, n', p) \equiv h(a, n, f(a, n, p))$ egy $f : \forall xz(F \rightarrow G(z))$ konstrukciót definiál.

Helyettesítés:
Ha $g : \forall xz(F(z) \rightarrow G(z))$, továbbá $t = t(x)$ olyan N típusú terminus, amelyben csak az x sorozat változói szerepelnek, akkor $f(a, p) \equiv g(a, \overline{t(a)}, p)$ egy $f : \forall x(F(t) \rightarrow G(t))$ konstrukciót definiál.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a $\forall x(s(x) = t(x))$ formula pontosan akkor bizonyítható a fenti konstrukciók alapján, ha $s(x) = t(x)$ a primitív rekurzív aritmetika (PRA) tétele, annak [Hilbert–Bernays 1934]-ben olvasható formalizálása szerint. Emiatt nevezem az ilyen – tehát az f_0–f_7 konstrukciókon, a kompozíción, az azonosságon, a párosításon, a projekción, a primitív rekurzión és a helyettesítésen alapuló – bizonyításokat *primitív rekurzív bizonyításoknak.*

VII.

Mind ez idáig amellett érveltünk, hogy minden primitív rekurzív bizonyítás elfogadható a finitista számára is. Ennél többet is szeretnénk azonban állítani:

> TÉZIS – A finitista számára elfogadható $\forall x(F \to G)$ tételek pontosan azok, amelyeknek bizonyítása primitív rekurzív.

Tegyük fel tehát, hogy a finitistának rendelkezésére áll egy $f : \forall x(F \to G)$ konstrukció. Ez annyit jelent, hogy tetszőleges $a : A$ és $p : F(a)$ alapján úgy kapta meg az $f(a,p) : G(p)$-t, hogy nincs értelme megkövetelni a szóban forgó konstrukció érvényességének bizonyítását. S valóban, a 'konstrukció' kifejezést kizárólag ilyen kontextusokban használjuk.

Az f_0–f_7 alapvető konstrukciók a – valamely adott C típusba tartozó objektumok közötti – azonosság és a definíció szerinti egyenlőség ($\equiv$) jelentése, valamint (i)–(iii) alapján kaphatók meg. A kérdés ezek után a következő: miként építhetjük fel ezekből f-et? Ha f-et a fenti – és esetleg további – konstrukciók alapján expliciten definiáltuk, akkor e definícióban kizárólag azonosságok, projekciók, kompozíciók, párosítás és primitív rekurzió szerepelhetnek, vagyis – az imént bevezetett szóhasználattal élve – az adott függvények alapján primitív rekurzív módon adtuk meg. Az ilyen explicit definíciók tehát nem vezetnek ki a primitív rekurzív bizonyítások köréből. Másrészről viszont, ha az $f(a,p)$ bizonyítás definíciójában magára f-re is hivatkozunk, ugyanaz az elemzés, amelyet első, az $f : A \to B$ finit függvényekre vonatkozó tézisünkhöz adtunk, arra az eredményre vezet, hogy f-et a definíciójában szereplő többi függvény alapján primitív rekurzióval adtuk meg; ellenkező esetben ugyanis végső soron rákérdezhetnénk, vajon az állítólagos konstrukció működik-e, így viszont az általunk használt szigorú értelemben nem tekinthetnénk primitív rekurzív konstrukciónak.

Ezzel a finitizmus dogmatikus kifejtésének végére értünk. Tanulmányunk hátralévő részében néhány rokon problémát veszünk sorra, célunk ezzel egyrészt az expozíció főbb pontjainak további megvilágítása, másrészt bizonyos ellenvetések megválaszolása.

Kezdjük azzal, hogy a számfogalom néhány további aspektusát is górcső alá vesszük.

Hilbert számára a finit vagy „tartalmas" matematika tárgyát konkrét jelek és a közöttük fennálló szintaktikai relációk alkotják. Álláspontját két érvvel is alátámasztotta. Az első szerint ezen objektumok szemléletben való megjeleníthetősége garantálja, hogy a matematika biztos alapokon áll. A második érv szerint a szóban forgó objektumok és relációk minden tudományban nélkülözhetetlenek. A számok az 1, 11, 111 stb. jelek révén kerülnek be ezen objektumok közé. Mint azt már korábban megjegyeztük, a Gödel-számozás biztosítja, hogy semmit nem veszítünk, ha vizsgálódásaink körét a számjelekre korlátozzuk.

Nem világos azonban, hogy a 'konkrét' jelzőt Hilbert milyen értelemben használja. Abból, hogy a fizikai tudományokra hivatkozva amellett érvel, hogy végtelen totalitásokkal a fizikai univerzumban sohasem találkozhatunk, arra következtethetünk, hogy inkább jelpéldányokra, mintsem jeltípusokra gondol. E gondolatmenet ugyanis Hilbertnél azt hivatott alátámasztani, hogy a végtelen összességek a matematikának nem valóságos, hanem ideális objektumai, használatuk jogosságát ennélfogva konzisztenciabizonyításokkal kell biztosítanunk. Érdemes ezzel összevetni a *Grundlagen der Mathematik* I. kötetének fejtegetéseit arról, hogy mikor számít két jel ugyanannak. A kérdés itt az, hogy az 'ugyanaz' kifejezés e helyütt vajon az azonosság értelmében szerepel-e, vagy egyszerűen arra utal, hogy a két jel formája megegyezik, vagyis ugyanabba a jeltípusba tartoznak. Azzal a nézettel kapcsolatban, hogy a matematika tárgyát jelpéldányok alkotják, több probléma is felmerül; hogy mást ne mondjunk, senki nem állíthatja meggyőződéssel, hogy a számokra vonatkozó érvelések függhetnek attól, hogy miféle fizikai tárgyak léteznek. Van még egy pont, amellyel kapcsolatban azok, akik jelpéldányokról és jeltípusokról értekeznek, gyakran tévesen ítélnek: bármilyen értelmes megkülönböztetésből induljunk is ki, a jelpéldányokat absztrakt, nem pedig konkrét objektumoknak kell tekintenünk. A szempontunkból releváns konkrét objektumok ugyanis a fizikai tárgyak, a véges sorozatok – ezen belül a jelpéldányok – viszont nem azok. Példának okáért az 111 fizikai objektumban struktúráknak – de még véges, avagy akár háromelemű sorozatoknak is – kimeríthetetlen sokaságát találhatjuk. E különböző struktúrák, köztük a 3 jelének célba vett, konvenció alapján megkülönböztetett példányával, mind absztraktak, mivel létezésük az objektum fizikai létezésétől függ. Ha ez a fizikai objektum megsemmisül, a struktúrák nemkülönben. Másrészről viszont tökéletesen értelmes azt állítani, hogy minden jeltípus konkrét – annyiban, hogy univerzáliaként felfogott létezése nem függ semmi másnak a létezésétől, így attól sem, hogy léteznek-e példányai, vagy olyan fizikai tárgyak, amelyektől esetleg e példányok függenek.

Mindenesetre Hilbert arról beszél, hogy tudjuk, mikor tekintsünk két jelet ugyanannak vagy különbözőnek, ez pedig a példányok vonatkozásában nyilvánvalóan azt jelenti, hogy képesek vagyunk eldönteni: ugyanabba vagy különböző típusba tartoznak-e. A valódi, tartalmas matematika hilberti felfogásának szempontjából, hogy tudniillik a matematikát a jelek tudományaként fogjuk fel, ennek a képességünknek alapvető jelentősége van. Azonban tetszőleges példányból, mondjuk 111-ből kiindulva eljuthatunk bármely másikhoz, mondjuk '·'-hoz, jelpéldányok egy véges sorozatán keresztül úgy, hogy e sorozat szomszédos tagjait nem tudjuk megkülönböztetni egymástól. Ez, s az ehhez hasonló megfontolások mind azt támasztják alá, hogy számunkra nem a jelpéldányok, hanem a típusaik az értelmes objektumok, abszolút precizitással csak ez utóbbiakról beszélhetünk. A matematika tárgyát a típusok adják.

Amiben az 111 jel típusa különbözik 3-tól, a háromelemű sorozat formájától, az nem más, mint a megszorítás, mely szerint a sorozat minden tagjának egy 1-esnek kell lennie. Ha így nézzük a dolgot, a matematika tárgyára vonatkozó hilberti álláspont nem különbözik lényegesen a mienktől. Nem könnyű pontosan meghatározni, Hilbert milyen jelentőséget tulajdonított a fizikai tudományra vonatkozó megjegyzéseinek. Mégis hajlok arra az álláspontra, hogy a 'konkrét' kifejezés használata nem jelenti egyúttal azt, hogy Hilbert szerint a számok fizikai objektumok, vagy azoktól függenek. Ha ebben nem lenne igazam, a hilberti állásponttól akkor is csak olyan ponton térek el, amely amúgy sem tartható fenn következetesen.

IX.

Hilbert nézeteivel kapcsolatban még egy kérdésre ki kell térnünk: a jelek, s köztük a számok szemléletben való megjeleníthetőségének kérdésére. Teljesen nyilvánvaló – miként Kant és Hilbert számára is az volt –, hogy vannak számok, mint például 10^{10} vagy 30, amelyek a szó semmilyen értelmében nem reprezentálhatók a szemléletben. Kant erre feltehetően azt válaszolta volna, hogy ha maguk e számok nem is, legalább a részeik megjeleníthetők a szemléletben. A probléma csupán az, hogy 10^{10}-nek pontosan 10^{10} része van. Talán bizonyos értelemben a rákövetkezés is reprezentálható a szemléletben, az tehát, ahogy 1 . . . 1 után 1 . . . 11 következik. Ehhez azonban tudnunk kell, mit jelent itt a ' . . . ' – a *Szám* ideájának lényege azonban éppen az iteráció, amelyet ' . . . ' jelez, s ez az igazi probléma. Bárhogyan és bármilyen értelemben tudjuk is a rákövetkezőképzés műveletét szemléletünkben reprezentálni, a *Szám* megértéséhez e művelet *iterációjának* megértése az elengedhetetlen feltétel. Ezzel az – önmagában nem a szemléleten alapuló – ideával rendelkezni azonban annyit tesz, mint rendelkezni a szám ideájával, amely *nem függ a szemléletben való megjelenítés egyetlen módjától sem.*

Ugyanezen ellenvetésnek ki van téve Brouwer számfogalomra vonatkozó elemzése is, amelynek alapja az időbeli egymásutániság (a „kettős egység") tudata. A számfogalom lényegét ugyanis éppen ezen operáció iterációja jelenti, ennek ideája azonban nem alapulhat az időtudaton.

Ha elutasítjuk a felfogást, miszerint a számok a szemléletben reprezentálhatók, úgy vélem, hasonlóan kell tennünk azzal a megkülönböztetéssel is, amely Hilbert szerint a valódi tárgyaknak tekinthető véges jelek és a transzfinit, ideális objektumok, a tiszta ész ideái között tehető. A 10^{10} számot semmivel sem könnyebb megjeleníteni a szemléletben, mint az összes szám $0, 1, 2, \ldots$ sorozatát. Utóbbi is a rákövetkezőképzés műveletének iterálásával kapható meg – csupán e műveletet végtelen sokszor kell végrehajtanunk. El kell utasítanunk a finit és a nem-finit matematika közötti különbség Hilberttől származó, episztemológiai alapvetését. A finitizmus jelentősége abban áll, hogy a finit objektumok és bizonyítások jelentik azt a minimális matematikai eszköztárat, amelyet a számok valamennyi tárgyalása előfeltételez. Az A-n értelmezett, B-be érkező függvény fogalma azonban például tökéletesen világos fogalom, s ha már rendelkezésünkre áll $f : A \to B$ konstrukciója, akkor finitistaként – éppúgy, mint nem-finitistaként – módunkban áll, hogy elvonatkoztatva attól, hogy miként kaptuk meg fa-t a alapján, magát a konstrukciót önálló objektumnak tekintsük. Ha pedig adott $f : A \to B$ és $a : A$, akkor nyugodtan következtethetünk arra, hogy $fa : B$; ez ugyanis a függvény fogalmához tartozik. A halmazelmélet paradoxonjai nem a transzfinit objektumok adott $A \to B$ típusú függvényként való bevezetésének következményei, hanem Frege azon feltevéséből erednek, hogy az univerzum – vagy legalább a matematikai univerzum – maga is V típusú matematikai objektumnak tekinthető (amely feltevés alapján módunkban áll további, például $V \to V$ típusú objektumokat konstruálni, amelyek újra csak V típusúak). Egyáltalán nem meglepő, hogy e vakmerő feltevést csaknem azonnal meg is cáfolták. Ellentétben bizonyos sokat hangoztatott nézettel, Fregének ez a feltevése egyáltalán nem volt jelen rejtetten a matematikai gyakorlatban, még Cantor munkáiban sem, és különösen nem az $A \to B$ típusú függvények ideájában, ahol A és B adott objektumtípusok.

Rátérünk a számfogalom definiálására tett Frege–Dedekind-féle kísérletekre. Legyen S objektumok egy halmaza, $e \in S$ és $g : S \to S$. Tegyük fel, hogy e és g eleget tesznek a 0-ra és a rákövetkezőfüggvényre vonatkozó kikötéseknek: $e \neq gx$ és $x = y \Rightarrow gx = gy$, S tetszőleges x és y eleme esetén. Nevezzük S egy S' részhalmazát *hereditáriusnak*, ha $e \in S'$ és minden x-re, ha $x \in S'$, akkor $gx \in S'$ is fennáll. Az S halmaz maga például hereditárius. Jelölje M valamennyi hereditárius halmaz metszetét. Könnyen látható, hogy M is hereditárius, méghozzá a legszűkebb ilyen tulajdonságú halmaz, azaz:

$$e \in M \qquad x \in M \Rightarrow gx \in M$$

$$\forall X \subseteq S(e \in X \,\&\, \forall y(y \in X \Rightarrow gy \in X) \Rightarrow M \subseteq X)$$

A primitív rekurzióval való definíciót a következőképpen kapjuk meg. Legyen $k : B$ és $h : B \to B$; annak az $f : M \to B$ függvénynek a definícióját akarjuk megadni, amelyre $fe = k$ és $f(gx) = h(fx)$. (A primitív rekurzió általánosabb formája ebből vezethető le, vagy – halmazelméleti kontextusban – erre vezethető vissza.) Nevezzük az $M \wedge B$ halmaz egy H részhalmazát *hereditáriusnak*, ha $(e, k) \in H$, továbbá $(x, b) \in H$ esetén fennáll $(gx, hb) \in H$ is. (M, B) például e definíció szerint hereditárius. Jelöljük (M, B) összes hereditárius részhalmazának metszetét F-fel. F megint a legszűkebb ilyen tulajdonságú halmaz. Bizonyítható, hogy $\{x \in M : \exists! b : B((x, b) \in F)\}$ az M halmaz hereditárius részhalmaza, így egyenlő M-mel. Ez elég ahhoz, hogy $fx = b \Leftrightarrow (x, b) \in F$ olyan $f : M \to B$ függvényt definiáljon, amely eleget tesz a fenti egyenlőségeknek.

Nevezzük az ilyen $\langle M, e, g\rangle$ rendszereket *egyszerűen végtelen rendszernek*. Bármely két egyszerűen végtelen rendszer izomorf egymással: ha ugyanis $\langle M', e', g'\rangle$ szintén egyszerűen végtelen rendszer, akkor az $fe = e'$, $f(gx) = g'(fx)$ egyenlőségekkel definiált függvény $M \to M'$ izomorfizmus.

Ha tehát rendelkezésünkre áll egy megfelelő $\langle S, e, g\rangle$ rendszer, akkor a fentieket követve konstruálhatunk egy $\langle M, e, g\rangle$

rendszert, amely a számok $\langle N, 0,' \rangle$ rendszerének valamennyi formális jellemzőjével bír, sőt azzal izomorf.

Halmazelméleti jellege miatt e konstrukció finitista alapon természetesen nem fogadható el. Amennyiben Fregét követve a számok rendszerét valamely speciális $\langle M, e, g \rangle$ egyszerűen végtelen rendszerrel azonosítjuk, akkor konstrukciónk ki van téve Benacerraf kritikájának,[5] mely szerint a számokat ily módon tőlük – mint számoktól – idegen vonásokkal ruházzuk fel. Dedekind konstrukciója viszont nem bírálható ilyen módon, ő ugyanis a számok rendszerét elménk szabad alkotása eredményének tekinti, amelyhez valamely egyszerűen végtelen rendszerből kiindulva jutunk el, oly módon, hogy elvonatkoztatunk az elemek partikuláris vonásaitól. A hilberti kritika azonban mélyebbre hatol, s Dedekind konstrukciójával szemben sem hatástalan. Ennek lényege a következő kérdés: honnan vesszük az eredeti S rendszert, amely a konstrukció alapjául szolgál? Frege S rendszere az összes – véges és végtelen – számosság (kardinális szám) halmaza. Frege logikai keretelmélete inkonzisztens, a számosságra adott definíciója nem tartható. Cantor óta azonban azt is tudjuk, hogy az összes számosság nem alkothat halmazt. Dedekind számára S az elgondolható objektumok halmaza. Nem látható egykönnyen, miképp lehetne ezt úgy értelmezni, hogy elkerüljük a Russell-paradoxont. A célnak megfelelő $\langle M, e, g \rangle$ rendszerek definiálhatók a Zermelo–Fraenkel-féle halmazelméletben, ennek azonban csupán akkor van jelentősége, ha a halmazelméletet interpretált, nem pedig pusztán formális rendszernek tekintjük. Az elmélet a szándékolt interpretáció szerint ráadásul éppen azon halmazok elmélete, amelyek a hatványhalmazképzés $\mathbb{P}$ műveletének ϕ, $\mathbb{P}\phi$, $\mathbb{P}\mathbb{P}\phi, \ldots$ transzfinit iterációja alapján kaphatók meg. A végtelen halmazok axiómájának igazolásához – mely az $\langle M, e, g \rangle$ rendszerek definíciójához nélkülözhetetlen – úgyszintén végtelen iteráció szükségeltetik. Következésképp nem helyes példának okáért a véges Neumann-féle rendszámok definíciójára úgy gondolni, mintha ezek alapján a számfogalom más fogalmakra körforgás nélkül vissza-

[5] Lásd [Benacerraf 1965].

vezethető lenne. Anélkül is nyilvánvalónak tűnik, hogy sorra vennénk és elvetnénk valamennyi lehetőséget (ilyen lehet egy egyenes pontjainak rendszere, vagy a *véges* sorozatok rendszere, mondjuk olyan sorozatoké, amelyeknek minden tagja ugyanaz a meghatározott objektum stb.), hogy egy $\langle M, e, g\rangle$ rendszer definíciójában vagy a számfogalom (a *végesség* vagy a *véges sorozat*) jelenik meg kikerülhetetlenül, vagy más – például geometriai – fogalmak, amelyek semmivel sem világosabbak számunkra, mint a számfogalom.

XII.

A számokról adott elemzésem „platonista" abban az értelemben, hogy a számokra vonatkozó kijelentéseket ténylegesen úgy tekintem, hogy számokról, és nem – valamilyen körmönfont értelemben – bizonyos más típusú objektumokról, esetleg semmiről sem szólnak. Amikor a *Számról* vagy a számokról mint ideákról beszélek, akkor nem valamiféle mentális képre gondolok, hanem olyan struktúrára, amely mindenütt jelen van tapasztalatunkban, s amelyről képesek vagyunk precíz alapelveket megfogalmazni; ezen alapelvek jelentése – tágabb értelemben – magából a tapasztalatból, tehát a számfogalom alkalmazásából ered, érvényességük azonban semmiképpen nem függ a tapasztalattól. (Éppen ez okból kifolyólag nevezem a számfogalmat *matematikai* fogalomnak.) Maga Platón ugyancsak ebben az értelemben tekinthető platonistának.

A kérdésnek, hogy vajon léteznek-e ebben az értelemben számok, nincs értelme, hacsak nem arra a trivialitásra gondolunk, hogy létezik-e olyan szám, amely szám – amire válaszolhatjuk azt: a 0 ilyen szám. Ez azonban – a carnapi terminológiát követve – *belső* kérdés. A *léteznek-e a számok?* külső kérdés kiindulópontja olyan egységes létezésfogalom kellene hogy legyen, amely ránk nézve éppoly kötelező érvényű, mint Istenre nézve, s amellyel nem kerüljük meg a kérdést. E problémakör, amely nominalizmus-realizmus vitaként híresült el, hosszú múltra tekint vissza, s alaposabb tárgyalást érdemel.

Itt csak annyit szeretnék leszögezni, hogy a kihívás címzettjei nyilvánvalóan azok, akik szerint e probléma valódi probléma.

A döntő kérdés, amire mindenképpen fel kell hívnom a figyelmet, a következő: a platonizmus az általam használt értelemben – s éppúgy abban az értelemben, ahogy Platón matematikai objektumokról beszélt – nem jelenti azt, hogy posztulálunk vagy létezőnek tekintünk egy misztikus kapcsolatot, amelynek révén hozzáférhetünk a köznapi értelemben felfoghatatlan objektumokhoz. Ezeket az objektumokat a legprecízebb módon is képesek vagyunk felfogni, azaz racionális érvelés tárgyává tenni, méghozzá éppen azért, mert az ilyen érveléseknek sem a jelentése, sem az érvényessége nem függ érzékszervi észleléseink bizonytalan tartalmaitól.

XIII.

A finitizmus általunk adott értelmezése két részből áll. Először kifejtettük, milyen értelemben bizonyíthatók univerzális állítások a számokról anélkül, hogy végtelen összességek létezését feltételeznénk. Erre az elemzésre alapozva mondtuk ki a tézist, mely szerint a finit matematika: a primitív rekurzív aritmetika. Helyénvaló, ha most rátérünk annak a kérdésnek a tárgyalására, hogy mindez miképp egyeztethető össze Hilbert finitizmussal kapcsolatos nézeteivel.

Hilbert sehol nem tárgyalja kimerítően a finit általánosság kérdéskörét, azt tehát, hogy miképp lehet finit alapon olyan függvénykifejezéseket bevezetni, mint $m+n$, vagy olyan állításokat bizonyítani, mint $\forall xy(x + y = y + x)$. Tanulmányunk I. szakaszának elemzése rámutatott, hogy e két probléma ugyanazon kérdés két aspektusának tekinthető, s lényegüket tekintve nem különböznek egymástól: mindkettő bizonyos típusú függvénykifejezések bevezetésére vonatkozik. Hilbert eljárása többnyire az, hogy példákat sorol fel, s rámutat ezek tartalmi („inhaltliche") helyességére. Figyelembe véve azonban a nem-finit matematikát illető formalizmusát, a tartalmas és a formális közötti különbség nála egyszerűen a finit és a nem-finit közötti különbség, így az utóbbi distinkció mibenlétének feltárásában nemigen lehet segítségünkre. Sokan, akik e kérdésről értekeztek, a szóban forgó különbség alapját abban látták, hogy mi az, ami közvetlenül, a szám (vagy a jel) idája alapján megragadható, anélkül hogy transzfinit vagy magasabb rendű (mindazonáltal értelmes) objektumokra kellene hivatkoznunk. Gödel azt a kérdést tette fel, vajon megvonható-e ez a határ elvi alapon, vagy egyszerűen az intellektuális képességeken múlik. Ha azonban valaki azt állítja, hogy a dolog így és így áll, akkor ésszerűnek tűnik megkövetelni, hogy állítását bizonyítsa is be. Ha úgy látja, hogy a szóban forgó eredményhez kizárólag finit objektumok alapján jutott el, akkor be is kell bizonyítania ezen az alapon. E követelmény értelmessége akkor kerül csak veszélybe, amikor pontosan azoknak a konstrukcióknak az érvényessége szorul alátámasztásra, amelyek eredményei a szóban forgó objektumok. Ilyen esetekben ugyanis bizonyítás kizárólag e konstrukciók alapján adható meg. E gondolatmenetet követve a finit általánosítás fenti analíziséhez érkezünk el. Az álláspont mellett felhozhatók Hilberttől származó érvek is, annak a vitának az anyagából, amelyet Poincaréval folytatott a matematikai indukció státusáról.

Hilbert különbséget tesz tartalmi és formális indukció között: előbbi azon a belátáson alapul, hogy miként juthatunk el valamely számhoz, utóbbi viszont egy formális axiómán. Úgy vélem azonban, hogy a formális indukció hilberti jellemzése, amennyiben ez egyszerűen nem-finit indukciót jelent, téves. A finit és a nem-finit közötti különbség e tekintetben egyszerűen arra vonatkozik, hogy milyen $F(n)$ típusok használatát fogadjuk el. A nem-finit oldal képviselője megengedheti például az $F(x) = G(x) \rightarrow H(x)$ függvénytípusokat is. A matematikai indukció alapja azonban mindkét esetben ugyanaz: annak belátása, hogy mit is jelent, ha valami egy tetszőleges N típusú objektum.

Kreisel[6] szerint Hilbert a finitizmust illetően különböző időpontokban különböző nézeteket képviselt. Egyetlen kivételtől eltekintve azonban az általa hozott példák legföljebb annyit

[6] [Kreisel 1970].

támasztanak alá, hogy a hilberti bizonyításelmélet célkitűzései nem alkotnak egységes rendszert – a kivételt egy Kreisel által tévesen értelmezett példa jelenti.

E kivétel vezet el az elemzésünk által felvetett második kérdéshez: vajon mennyiben áll összhangban tézisünk Hilbert álláspontjával? Kreisel rámutat, hogy bár Hilbert szinte mindenütt, még a téma legérettebb kifejtését jelentő *Grundlagen der Mathematik* I. kötetében is kizárólag primitív rekurzív érvelési módokat mutat be finitként, az Über das Unendliche egy passzusában az $f : N \wedge N \wedge N \rightarrow N$ Ackermann-függvényt tárgyalja, amelyet az alábbi egyenlőségek definiálnak:

$$f(0, m, n) = m + n \qquad f(k', m, 0) = m$$
$$f(k', m, n') = f(k, m, f(k', m, n))$$

s amely nem primitív rekurzív függvény. Hilbert e függvényt a magasabb típusú függvények elméletének kontextusában mutatja be. Ha a szóban forgó típusokat úgy tekintjük, mint amelyek képzése során N-ből kiindulva nem csupán az $A \wedge B$, de az $A \rightarrow B$ műveletet is felhasználhatjuk, ahol $A \rightarrow B$ az A-n értelmezett, B-be érkező függvények típusa, akkor a $G : (N \wedge N \rightarrow N) \wedge N \wedge N \rightarrow N$ függvényt definiálhatjuk az alábbi egyenlőségekkel:

$$G(g, m, 0) = m \qquad G(g, m, n') = g(m, G(g, m, n));$$

e definíció a magasabb típusú primitív rekurzióra szolgál példával, és ugyanolyan alapon igazolható, mint a finit típusokra vonatkozó primitív rekurzió, azzal a különbséggel, hogy itt a nem-finit típusokat is megengedjük. Ezen a módon az Ackermann-függvény is definiálható primitív rekurzióval:

$$f(0, m, n) = m + n \qquad f(k', m, n) = G(f_k, m, n),$$

ahol is $f_k(m, n) = f(k, m, n)$.

Hilbert azonban sehol sem tekintette finitnek az efféle, magasabb típusok – s így egy eleve adottnak tekintett függvényfogalom – alapján definiált függvényeket. E függvények körében a klasszikus logika operátorait is bevezette, ezen operátorokat pedig nyilvánvalóan nem tekintette finit objektumoknak. Ilyen konstrukciókra azért volt szüksége, hogy definiálhasson egy formális rendszert, amelynek keretei között tárgyalható a cantori kontinuumhipotézis, amelynek igazságát bizonyításelméleti módszerekkel remélte eldönteni. Elgondolásai e tekintetben kissé zavarosak. Annyi azonban világos, hogy – informálisan – olyan formális rendszerről beszélt, amelyben függvényekről bizonyíthatunk be állításokat; magát a függvényfogalmat azonban nem fogadta el finit fogalomként. Az Ackermann-függvény példájával azt mutatta meg, miként léphetünk ki egy ilyen rendszerben a kizárólag finit típusok alapján definiált függvények köréből.

Kreisel maga is előáll a finitizmus egy értelmezésével,[7] mely szerint a finit függvények pontosan azok, amelyek létezése az elsőrendű aritmetikában bizonyítható; ezen függvények nyilván sokkal tágabb osztályt képeznek, mint a primitív rekurzív függvények. Azonban, talán éppen amiatt, hogy félreértette Hilbertnek az Ackermann-függvényre vonatkozó megjegyzéseit, elemzésével Kreisel tökéletesen célt tévesztett. Vizsgáljunk meg egy példát arra, hogy szerinte a finitista miként értelmezhet rekurzív, de nem primitív rekurzív függvényeket. Legyen $F(x,y)$ két változót tartalmazó egyenlőség, jelölje $0^{(n)}$ a $0^{''\ldots'}$ számjelet (amelyben n darab $'$ jel szerepel) és tegyük fel végül, hogy rendelkezésünkre áll a g és a h függvény, s ezekről finit – mondjuk primitív rekurzív aritmetikai – eszközökkel belátható következő általános kijelentés:

> $h(x)$ a primitív rekurzív aritmetika terminusa, jelöljük t-vel, $g(x)$ pedig az $F(0^{(x)},t)$ egyenlőség egy primitív rekurzív aritmetikai levezetése.

Ennek alapján értelmezhetnénk a következő függvényt:

$f(n) =$ a legkisebb olyan x szám, amelyre $F(n,x)$.

Emögött az az elgondolás áll, hogy a finitistának be kell tudnia látni egy primitív rekurzív aritmetikai levezetés érvényességét, s így az $F(0^{(n)},t)$ egyenlőség levezetése alapján látnia

[7] Lásd [Kreisel 1958].

kell, hogy van olyan x szám, amelyre fennáll $F(n, x)$. Ez azonban nyilvánvaló tévedés. Ahhoz ugyanis, hogy a finitista érvényesnek tekinthesse a primitív rekurzív aritmetikát, látnia kell a primitív rekurzióval történő függvénydefiníció *általános* érvényességét is. Ez utóbbi elvet azonban még csak megfogalmazni sem tudja, ehhez ugyanis a függvény fogalmára lenne szüksége. Különös, hogy Kreisel, aki expliciten kijelenti: a finitizmus matematikai jellemzése finit keretek között nem adható meg, ugyanakkor kritikátlanul azt is felteszi: mivel a primitív rekurzív aritmetika érvényes, a finitistának is látnia kell, hogy a dolog valóban így áll.

XIV.

Hilbert számára a matematika finit módszerekre való korlátozása mellett e módszerek megbízhatósága szól, e megbízhatóság forrása pedig, felfogása szerint, a jelek szemléletben való megjeleníthetősége. Amellett érveltünk, hogy a finit módszerek nem a jelek reprezentálhatóságán alapulnak (miként jeleníthetnénk meg egy tetszőleges számot szemléletünkben?), sokkal inkább a véges sorozat ideáján, s azon, miként kapható meg egy véges sorozat a nullsorozatból kiindulva – vagyis a *Szám* ideáján. Ezen idea megragadása pontosan azt jelenti, hogy látjuk: miként kaphatók meg a számok bizonyos konstrukciókat követve, s éppen e konstrukciók jelentik a finit érvelések alapját. Nem arról van szó tehát, hogy létezik valahogy, valahol a *Szám* ideája, azt korántsem tévedhetetlen eszközeinkkel megvizsgálva – ahogy a fizikai jelenségek esetében tesszük – felfedezhetnénk, miféle konstrukciókat foglal magában. A *Szám* megragadása nem több, mint e konstrukcióknak olyan eszközökként való azonosítása, amelyek segítségével a számok megkaphatók. (Természetesen nem arról beszélek, hogy miként sajátítjuk el a számfogalmat, vagy hogyan tanulunk meg számlálni és számolni, hanem arról, hogy mit értünk meg akkor, amikor megértjük a *Szám* ideáját.) Nem érthetjük meg a *Szám* ideáját, ha ugyanakkor e konstrukciókat elutasítjuk.

Mindez persze nem zárja ki annak lehetőségét, hogy a *Szám* ideája esetleg inkoherens idea, hogy Descartes démona ellenünk dolgozik. Lehetséges vajon, hogy *korrekt módon* megadunk egy – mondjuk – primitív rekurzív aritmetikai $f : 0 = 1$ konstrukciót? Annak alapján, ahogy a *Szám* ideáját megértettük, azt válaszolnánk: nem. E megértés azonban a legfelső fórum, amelyhez folyamodhatunk. Descartes teológiai bizonyosságforrása híján nem reménykedhetünk abban, hogy abszolút érvénnyel beláthatjuk: ilyen konstrukció nem létezhet. Ebben az értelemben a bizonyosság mindig ki fog siklani a kezünk közül. Az inkoherencia éppúgy lehet a *Szám* vonása, mint a *Pirosé* az, hogy vannak határesetek, amelyekben alkalmazása nem egyértelmű.

Annak ellenére azonban, hogy nem beszélhetünk a finitizmus abszolút bizonyosságáról, mondhatjuk azt, hogy – egy meghatározott értelemben – *nem illetheti kétség*. A számokra vonatkozó nem-triviális gondolatmenetek ugyanis egytől egyig előfeltételezik a finit módszereket, nem létezhet tehát olyan álláspont, amely kitüntetettebb, vagy legalábbis ugyanolyan kitüntetett lenne, mint a finitizmus, s amelynek alapján a finitizmussal szemben hatásos érveket fogalmazhatnánk meg. Más szóval: a finit módszerekben nincs értelme kételkedni. (Ugyanilyen értelmű „kétségbevonhatatlanság" Descartes-nál is megjelenik a Harmadik meditációban, bár más vonatkozásban.)

Fordította Csaba Ferenc