GEORGE BOOLOS

# ISMÉT AZ ITERÁCIÓRÓL*

A halmazokról alkotott iteratív, avagy kumulatív felfogás szerint a halmazokat *lépésekben képezzük;* éspedig minden halmazt megkaphatunk a következő „eljárás" valamely lépésében: a 0. lépésben képezzük az individuumok minden lehetséges együttesét. Az individuumok olyan objektumok, amelyek nem halmazok; a szokásos okok miatt most feltesszük, hogy nincsenek individuumok. Így a 0. lépésben egyedül az üres halmazt kapjuk. Az 1. lépésben a 0. lépésben nyert halmazok minden lehetséges együttesét képezzük, vagyis az üres halmazt, és azt a halmazt, amelynek egyetlen eleme az üres halmaz. A 2. lépésben nyert halmazokat a 0. és az 1. lépésben képzett halmazok összes lehetséges együttesei alkotják. Ezek száma $4(=2^2)$. A 3. lépésben nyert halmazokat pedig a 0. az 1. és a 2. lépésben képzett halmazok összes lehetséges együttesei, amelyek száma $16(=2^4)$. A 4. lépésben nyert halmazokat... Általában tetszőleges $n$ természetes számra az $n$-edik lépésben nyert halmazokat az $n$-nél korábban, vagyis a $0, 1, \ldots, n-1$ sorszámú lépésekben képzett halmazok összes lehetséges együttesei alkotják.

Közvetlenül az összes 0., 1., 2., ... lépés után következik az $\omega$. lépés. Az ebben a lépésben képzett halmazok, hasonlóan a korábbiakhoz, az $\omega$-nál korábbi lépések során, vagyis a 0., 1., 2., ..., lépésekben képzett halmazok együtteseinek összes lehetséges együtteseiből állnak. Az $\omega$. lépés után az $\omega+1$. lépés következik, amelyben... Általában minden $\alpha$-ra, az $\alpha$. lépés során nyert halmazokat az $\alpha$-nál korábbi lépések során képzett halmazok összes lehetséges együttesei alkotják.

*Első megjelenése: *Philosophical Topics 42* (1989), 5–21. p. A fordítást a *Philosophical Topics* szerkesztőjének szíves engedélyével közöljük, ©1989.

Az eljárásnak nincs utolsó lépése: minden lépést közvetlenül követ egy másik. Így léteznek $\omega + 2., \omega + 3.\dots$ lépések. Közvetlenül ezek után következik az $\omega + \omega$. lépés, vagyis az $\omega \cdot 2$. lépés. Ezután az $\omega \cdot 2 + 1.$, $\omega \cdot 2 + 2.$ és így tovább. Közvetlenül az összes $\omega.$, $\omega \cdot 2.$, $\omega \cdot 3.$, $\dots$ lépések után az $\omega \cdot \omega$. lépés, vagyis az $\omega^2$. lépés következik. Azután az $\omega^2 + 1., \dots,$ és az eljárás így folytatódik.[1]

Vegyük észre, hogy a halmazokról alkotott iteratív felfogás e változata mellett egyetlen halmazt sem egy és csak egy lépésben képzünk: minden halmazt újraképzünk minden egyes lépés során, amely egy olyan lépés után következik, amelyben a kérdéses halmazt már képeztük. Nem kell feltételeznünk, hogy minden halmazhoz egyértelműen van egy olyan lépés, amely során a kérdéses halmazt először képeztük, tehát nem kell feltennünk, hogy a lépések jólrendezettek.

A halmazelméletről, vagyis a Zermelo–Fraenkel-féle axiómarendszerről ($ZF$), kiegészítve a kiválasztási axiómával néha azt mondják, hogy az iteratív felfogást „fejezi ki", „testesíti meg" vagy „fejti ki". Ebben az írásban az a célom, hogy tisztázzak néhány összefüggést a halmazelmélet, az iteratív elképzelés, továbbá a halmazelmélet egy másik, Russelltől és Neumanntól származó, a „méret korlátozásának" elvén alapuló felfogása, valamint Frege *Grundgesetze der Arithmetik*ban megfogalmazott rendszerének egyik helyesbített változata között, amely az említett utóbbi felfogást fejti ki. Az írás vége felé megpróbálom megfogalmazni kételyeimet azzal kapcsolatban, hogy vajon van-e egyetlen olyan felfogás, amely az egész halmazelmélet számára „alapul szolgál".

Vizsgálódásainkat azzal a módszertani kérdéssel kezdhetjük, hogy miféle igazolást nyújt a halmazelmélet számára az iteratív felfogás?

Nevezzük $Z^-$-nak azt az elméletet, amelynek axiómái a Zermelo-féle halmazelmélet axiómái, kivéve az extenzionalitási és a kiválasztási axiómát. ($Z$ a Zermelo-féle halmazelmélet, amelynek egyik axiómája az extenzionalitási axióma; a kiválasztási axióma nem teljes értékű axiómája sem $Z$-nek, sem

[1] Lásd ehhez számos más írás mellett [Boolos 1971a]-t.

$ZF$-nek, amely utóbbi rendszert úgy kapjuk, hogy $Z$ axiómáihoz hozzávesszük a helyettesítési axiómákat is.) Hamarosan látni fogjuk, hogy $Z^-$ levezethető az iteratív felfogás egy (első látásra figyelemre méltóan gyenge) formalizált változatából. Ebből nem következik, hogy az iteratív felfogás megmutatja, hogy $ZF$-nek a $Z^-$ részelméletben levezethető tételei *igazak*, mivel nincs okunk azt gondolni, hogy a lépések (bármik legyenek is ezek) és a halmazok megfelelnek az iteratív elképzelés által róluk felvázolt képnek, vagyis hogy a felfogás a halmazokra és a lépésekre nézve helyes. Ha a dolgok az iteratív felfogásnak megfelelően állnak, akkor $Z^-$ minden bizonnyal igaz, mivel kivétel nélkül *levezethető* az iteratív felfogásból. Azonban semmilyen független érv nem támasztja alá azt a meggyőződésünket, hogy a lépések és a halmazok éppen olyanok, amilyennek az iteratív felfogás mutatja őket.

(Érdekes kérdés, hogy vajon miért vagyunk hajlamosak elutasítani azt a szkeptikus feltevést, hogy a halmazokról kialakított iteratív felfogás – legalábbis nagy körvonalaiban – még akkor is lehet *téves*, ha a halmazelmélet nem szenved olyanféle formális fogyatékosságokban, amilyen például az egyszerű vagy az $\omega$-inkonzisztencia.)

A halmazok iteratív felfogását szokás „természetesnek" nevezni. A „természetes" jelző itt nem esztétikai tetszést fejez ki (esetleg kapcsolódva ahhoz a Panglossra emlékeztető nézethez, hogy a „természetesebb" vagy „egyszerűbb" elméletnek nagyobb esélye lehet arra, hogy igaz legyen), hanem pusztán annyit jelent, hogy ezt az elképzelést a halmazokról szerzett minden előzetes ismeret és tapasztalat nélkül elsajátíthatjuk, egy magyarázat alapján könnyen megérthetjük és kézenfekvőnek vagy legalábbis az igazságát felfoghatónak tarthatjuk. Ha egy elmélet ebben az értelemben „természetes", akkor nem ütközhet olyan mértékben előzetes elképzeléseinkkel, mint például az az (őrült) felfogás, amelyet az iteratív elképzelésből kapunk, ha benne felcseréljük a „korábbi" és a „későbbi" kifejezéseket.

Egy másik, ebben az értelemben természetes elképzelés a halmazok *naiv* felfogása, amely kétféleképpen is megfogalmazható. Egyfelől gondolhatjuk úgy, hogy minden predikátum terjedelme egy halmaz, másfelől pedig úgy, hogy tetszőleges nulla vagy ennél több dologhoz van egy meghatározott halmaz, amelynek ezek elemei.[2] A naiv elképzeléssel az a probléma, hogy a Russell-paradoxon tanúsága szerint inkonzisztens: annak a predikátumnak, hogy „olyan halmaz, amely nem eleme önmagának" egyetlen halmaz sem a terjedelme, és azokhoz a halmazokhoz, amelyek nem elemeik önmaguknak nincsen egy meghatározott halmaz, amelynek ezek elemei volnának.

A fentiektől eltérő halmazfelfogáshoz jutunk a „méret korlátozásának" elve alapján.[3] Ez az elv legalább kétféle formában fordulhat elő: erősebb változata szerint dolgok *akkor és csak akkor* alkotnak halmazt, ha nem hozhatóak kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésbe minden dologgal. A gyengébb változat szerint nincs olyan halmaz, amely elemei kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetőek minden dolognak, azok a dolgok azonban halmazt alkotnak, amelyek egy adott halmaz elemeivel kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésbe hozhatóak. (Bizonyos természetes feltevések mellett az utóbbi tagmondat által kifejezett feltétel tovább gyöngíthető arra, hogy: amelyekből nincs több mint egy adott halmaz elemeiből.) A két változat között az a különbség, hogy a gyengébbik nem biztosítja, hogy ha dolgok nem hozhatóak kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésbe minden dologgal, akkor minden esetben halmazt alkotnak.

A *méret korlátozása* – szemben mind a naiv, mind az iteratív felfogással – nem természetes nézet (egyik változatában sem), mivel csak akkor juthat valakinek az eszébe, ha már a halmazelméleti antinómiák kellőképpen átformálták az illető előzetes elképzeléseit; itt nemcsak a Russell-paradoxonra, hanem a Cantor- és a Burali-Forti-féle paradoxonokra is gondolnunk kell.

Az iteratív felfogás az egyetlen természetes és egyben (látszólag) konzisztens elképzelés a halmazokról, amely rendelkezésünkre áll, és ebből a felfogásból következik $Z^-$; *ez* az

[2] Lásd [Mates 1981], 43. p.

[3] A méret korlátozásának elvét több változatában is részletesen tárgyalja: [Hallett 1984], különösen a 4. és a 8. fejezetekben.

igazolás az, amelyet az iteratív felfogás $Z^-$ számára jelent (ha egyáltalán helyénvaló ebben az esetben az „igazolás" szó.)

Dan Leary egyszer azt a megjegyzést tette, hogy a halmazok lépésekben történő képzésének metaforája a helyes előadásmód egy bizonyos *narratív* hagyományából vagy elvéből származhat, amely szerint (általában és *ceteris paribus*) egy leírásnak, amely sajátos módon elrendezett dolgokról szól, a dolgok említésekor igazodnia kell a dolgok elrendezéséhez. Ennek megfelelően, amikor a halmazelmélet univerzumának szerkezetét írjuk le, akkor elsőként az üres halmazt említenénk, azután azt a halmazt, amely csak az üres halmazt tartalmazza, aztán mindezeknek a halmazát, azután *mindezeknek* a halmazát, és így tovább. A következőképpen fogalmazhatunk: adott az üres halmaz, az őt tartalmazó egyelemű halmaz, azután van két másik halmaz, amelyek elemei csak ezek közül kerülnek ki, azután tizenkét „új" (vagyis eddig nem említett) halmaz, amelyben csak az előbbiek fordulnak elemként elő... Az a tény, hogy egy ilyen felsorolás csak időben történhet, és hogy bizonyos halmazok mások előtt kerülnek benne említésre, könnyen (félre)érthető úgy, hogy ennek megfelelően maguknak a halmazoknak van valamiféle kvázi-temporális tulajdonságuk, és olyan állításokra csábíthat minket, hogy azok a halmazok, amelyek a leírásban korábban következnek ténylegesen is *korábbiak* a többinél, hogy halmazok nem létezhetnek, *amíg* az elemeik nem léteznek, hogy csak azután *jönnek létre*, miután az elemeik már létrejöttek, és hogy azután *képezhetőek* csak, miután már képeztük az összes elemüket.

Akárhogy is van, az elképzelés magyarázatához ez a metafora egyáltalán nem szükséges, hiszen a fentebbiek helyett mondhatjuk azt is, hogy adott az üres halmaz, a csak ezt tartalmazó halmaz, ezek halmazai, *ezek* halmazai, majd *Ezek* halmazai ... Vannak azután halmazok, amelyek mind*EZEKET* tartalmazzák. Hivatkozzunk mostantól az említett a halmazokra, mint „ezek"-re. Ekkor vannak ezek halmazai, *ezek* halmazai ... Vegyük észre, hogy a ' ... ' kipontozás, az 'stb.'-hez hasonlóan mutatószó. Mindkettő azt jelenti, hogy *és így tovább*, vagyis, hogy *ezen* a módon tovább.

Most azonban nem a metafora kiküszöbölésével foglalkozom, amit mellesleg egyszerűen meg lehet úgy tenni, hogy a 'lépés', 'képeztük' és a 'megelőzi' kifejezéseket primitívnek tekintjük,[4] vagy másképpen úgy, hogy helyettesítjük ezeket a 'rendszám', 'rangja' és a 'kisebb' primitívnek tekintett kifejezésekkel. Ehelyett azt szeretném megmutatni, hogy az iteratív felfogásnak milyen csekély része szükséges ténylegesen $Z^-$ levezetéséhez, vagyis azt, hogy létezik a halmazok lépésekben való képzésének egy igen egyszerű elmélete, amelyből $Z^-$ axiómái következnek (és azt, hogy milyen szükségtelenül bonyolult az az axiómarendszer, amely [Boolos 1971a]-ban olvasható).

Legyen $\mathcal{L}$ egy kétszortú elsőrendű nyelv, amelyben az $x, y, z, \ldots$ változók halmazokra, az $r, s, t, \ldots$ változók pedig a lépésekre vonatkoznak. Legyen $\mathcal{L}$ ban három kétargumentumú predikátum, egy lépések között értelmezett $r < s$ predikátum, amelyet „$r$ megelőzi $s$-t"-ként olvasunk, egy halmazok és lépések között értelmezett $xFr$ predikátum, amelyet „az $x$ halmazt az $r$-edik lépés során képeztük"-nek olvasunk, és egy halmazok közötti $\in$ predikátum, amelyet a szokásos módon értelmezünk.

Rövidítsük a '$\exists t(t < s \,\&\, yFt)$' formulát $yBs$-el, amelyet úgy olvashatunk, hogy „$y$-t egy $s$-et megelőző lépés során képeztük".

Ekkor az $S$ elmélet axiómái a következő mondatok lesznek. A 'megelőzi' predikátumra vonatkozó axiómák:

*Tra* $\quad \forall t \forall s \forall r(t < s \,\&\, s < r \supset t < r)$

*Net* $\quad \forall t \forall s \exists r(t < r \,\&\, s < r)$

*Inf* $\quad \exists r(\exists t(t < r) \,\&\, \forall t(t < r \supset \exists s(t < s \,\&\, s < r)))$

A halmazokra és a lépésekre vonatkozó axiómák:

*All* $\quad \forall x \exists s xFs$

*When* $\quad \forall x \forall s(xFs \equiv \forall y(y \in x \supset yBs))$

[4] Ahogyan például [Boolos 1971a]-ban tettem.

Az $\mathcal{L}$ nyelv minden olyan $A(y)$ formulájára vonatkozó specifikációs axiómák, amelyekben $x$ változónak nincs szabad előfordulása:

*Spec* $\exists s \forall y(A(y) \supset yBs) \supset \exists x \forall y(y \in x \equiv A(y))$.

Az axiómák magyarázatai: *Tra* természetesen azt mondja ki, hogy a *megelőzi* reláció tranzitív. *Net* egyik következménye $\forall s \exists r(s < r)$, vagyis, hogy minden lépéshez van olyan lépés, amelyet az illető lépés megelőz. *Net* következik $\forall s \exists r(s < r)$-ból, *Tra*ból és az $\mathcal{L}$ nyelvnek abból a *Con* formulájából, amely a *megelőzi* reláció összefüggő voltát mondja ki, vagyis a $\forall s \forall t(s < r \vee s = t \vee t < s)$ formulából; *Con* azonban *nem* axiómája az *S* elméletnek.

*Inf* azt állítja, hogy van „limesz" lépés, vagyis olyan lépés, amelyet megelőz legalább egy lépés, de nem előzi meg közvetlenül egyetlen lépés sem. Az $\omega$. lépés és vele együtt azon lépések létezése, amelyek *Inf* szerint léteznek figyelemre méltó sajátossága az általunk leírt elképzelésnek. *Inf* túl gyenge ahhoz, hogy a teljes tartalmát kimerítse azoknak a kijelentéseknek amelyeket a megközelítő leírásban végtelen lépések létezéséről tettünk; egy további axióma kellene például az $\omega + \omega$. lépés létezésének a biztosításához. Az axióma elegendő azonban ahhoz, hogy levezessük belőle a halmazelméletnek azt a mondatát, amelyet „végtelenségi axiómának" szoktak nevezni. Meg kell még jegyeznünk, hogy *Inf*-et csak a végtelenségi axióma levezetésében használjuk.

*All* talán az iteratív felfogás legjellemzőbb sajátosságát mondja ki, nevezetesen azt, hogy minden halmaz a fentebb leírt iteratív eljárás valamelyik lépése során képződik. *All*hoz *When* annyit tesz még hozzá, hogy egy lépésben akkor és csak akkor képzünk egy halmazt, ha minden elemét a korábbi lépések valamelyikében már képeztük. (Ennek megfelelően – ahogyan már korábban is megjegyeztük – a halmazokat folyamatosan újraképezzük.)

Mivel $\mathcal{L}$ elsőrendű nyelv, *Spec* axiómaséma és nem axióma. Azt a gondolatot próbáljuk megragadni vele, hogy bármely lépésben a korábbi lépésekben képzett halmazok „minden lehetséges összességét" képezzük. Nem teljesen világos, hogy milyen szerepet szánhatunk a 'lehetséges összesség' kifejezésnek. Miért használjuk a 'lehetséges' modális terminust, és egyáltalán miben különbözik egy összesség és egy halmaz? (*When* kimondja, hogy egy lépésben akkor és csak akkor képzünk egy halmazt, ha minden elemét a korábbi lépések valamelyikében már képeztük. Természetesen, ha egy lépés során képzünk egy halmazt, akkor azt annak a lépésnek a során képeztük. Mivel *járul hozzá* mindehhez *Spec* annak kimondásakor, hogy bármely lépésben a korábbi lépésekben képzett halmazok „minden lehetséges összességét" képezzük?) A gondolatot jobban visszaadhatjuk, ha a következőképpen fogalmazunk: tetszőleges $s$ lépéshez valamint tetszőleges, $s$-t megelőző lépések során képzett halmaz*ok*hoz (vegyük észre a többesszámot!) van olyan halmaz, amely pontosan ezeket a halmazokat tartalmazza. Egy másodrendű nyelven ez a gondolat tökéletesen kifejezhető: $\forall X[\exists s \forall y(Xy \supset yBs) \supset \exists x \forall y(y \in x \equiv Xy)]$. Máshol[5] érveltem amellett, hogy az ilyen formájú kifejezéseket szerencsére nem kell úgy tekintenünk, mint amelyekben valódi osztályok vagy más halmazoktól különböző, de halmazszerű objektumok felett kvantifikálunk. Amennyiben az iteratív felfogás nem zavaros (vagyis nem vész homályba, hogy milyen messze mehetünk el a lépések során), annyiban az elképzelés teljes egészében kifejezhető egy $\mathcal{L}$ kiterjesztéseként nyert másodrendű nyelven, de magán az elsőrendű $\mathcal{L}$-en nem.

*Spec* egy hasznos újrafogalmazása a következő:

$$\forall s \exists x \forall y(y \in x \equiv (A(y) \mathbin{\&} yBs)).$$

Annak belátásához, hogy a régi változatból következik az új, legyen $A'(y) \equiv A(y) \mathbin{\&} yBs$, és alkalmazzuk a régi változatot $A'(y)$-ra; az új változatból közvetlenül következik a régi.

Félrevezető lenne az extenzionalitási axiómát $S$ axiómájának tekinteni. Lehet, hogy „analitikus" vagy legalábbis „a-szó-bármely-jelentését-véve-analitikus" igazság az, hogy különböző halmazoknak különbözőek az elemei, de az iteratív felfogás tulajdonképpeni értelmében véve ezt nem biztosítja. Természetesen lehetséges volna levezetni az extenzionalitási

[5] [Boolos 1984]-ben és [Boolos 1985]-ben.

axiómát úgy, hogy *Spec*-ben az $x$ változót lekötő '$\exists$' után becsempészünk egy '!' jelet; célunk azonban az, hogy a rendelkezésünkre álló felfogást elemezzük, nem pedig az, hogy formalizáljunk valami tisztázatlan alapokon álló felfogást, amelyből sikerül levezetnünk az axiómákat.

Úgy tűnhet azonban, hogy az extenzionalitásról még más is elmondható azon felül, hogy a „kvázi-analitikus" vagy valami ehhez hasonló jelző alkalmazható rá. Ésszerűnek tűnhet az a gondolat, hogy egy halmaz és az elemei valóban nem különböznek egymástól. Vagyis a halmaz *nem más*, mint az elemei, azonos velük. (Kétségkívül ez a gondolat felelős azért a zavarodottságért, amelyet a kezdők gyakran éreznek, amikor azzal szembesítik őket, hogy meg kell különböztetni egy objektumot és a belőle képzett egyelemű halmazt.) Ha ez így van, akkor az extenzionalitás következik az azonosság tranzitivitásából, hiszen ha $x$ minden eleme $y$-nak is eleme és megfordítva, akkor $x$ elemei *nem mások*, mint $y$ elemei, s így $x$ – vagyis $x$ elemei – azonos $y$-al – vagyis $y$ elemeivel – s ennek megfelelően az extenzionalitás elve fennáll.

Az is bizonyos azonban, hogy van valami gyanús abban a javaslatban, hogy egy halmaz azonos az elemeivel – hogyan is lehetne *egy* halmaz azonos *azokkal*, ha azok kettőnél többen vannak – de úgy is felfoghatjuk a dolgot, hogy van ebben valami kevésbé gyanús is. Nem alkot-e John, Paul, George, és Ringo egy együttest, Dolly, Sztyiva, Tánya és Grisa egy családot és nem volt-e Bird, McHale, Parish, Ainge és Johnson egy kezdőötös? Russell egyszer a következőket írta: „ebben a fejezetben az »*a*«-val fogunk foglalkozni többes számban: a londoniak, a gazdag emberek fiai, és így tovább. Másként fogalmazva az *osztály*okat fogjuk szemügyre venni."[6] Nehéz belátni, hogyan tehette fel Russell, hogy amikor a londoniakkal foglalkozunk, akkor ezen emberek osztályával foglalkozunk, hacsak nem tételezte fel azt, hogy London lakossága ugyanaz, azaz nem más, mint a lakók osztálya, tehát hogy azonos azzal. Tökéletesen ésszerűtlen lenne azt gondolni, hogy Russell ezt a szakaszt írva arra gondolt, hogy az osztály különbözik

[6] [Russell 1919], 181. p.

az elemeitől, de ezekre alapul, és hogy amikor az elemekre hivatkozunk, akkor valami másra is utalunk, nevezetesen az osztályra.

Annak azonban, aki azt a nézetet védelmezi, hogy a Beatlesek – a szó szigorú értelmében – azonosak egyetlen dologgal, mármint az együttessel, és hogy Oblonszkijék azonosak egy családdal, meg kell néhány fogós kérdést válaszolnia, így például azt, hogy az együttes és a család két dolog-e avagy nyolc? Hogyan lehet továbbá benne az együttes a saját maga által alkotott egyelemű halmazban anélkül, hogy egyben a négy Beatles fiú is benne ne lenne ugyanebben az egyelemű halmazban? Talán mégis jobb, ha az extenzionalitási axiómának ettől a magyarázatától nem várunk túl sokat.

A következő érvről úgy tűnhet, hogy kimutatja: az iteratív felfogás mellett az extenzionalitási axióma nyilvánvaló, tehát jogosult lett volna a $\forall x \forall y (\forall z (z \in x \equiv z \in y) \supset x = y)$ formulát *S* axiómái közé felvenni. Figyeljük meg azokat az egyértelműségre vonatkozó implicit kijelentéseket, amelyeket az első bekezdésben az *'az* üres halmaz' és az *'az az* egyelemű halmaz, amely az üres halmazból áll' kifejezések használatával tettünk, továbbá azokat a kijelentéseket, amelyeket az első lépések során képzett halmazok számára vonatkozóan tettünk, például amikor azt mondtuk, hogy a 0. lépésben egyedül az üres halmazt képezzük, vagy amikor azt, hogy a 3. lépésben 16 halmazt képzünk. Ezek a kijelentések feltételezik az extenzionalitás igazságát, tehát annak szerepelnie kellene *S* axiómái között.

Válaszként arra hívhatjuk fel a figyelmet, hogy már a 0. lépésben képzett halmazok számának kiszámítása során is közvetlenül alkalmaznunk kellett az extenzionalitás elvét, tehát már azelőtt, hogy – egy igen kis résztől eltekintve – felvázoltuk volna az iteratív felfogást. Annak az elvnek a fenállásáért tehát, amely szerint azok a halmazok azonosak, amelyek elemei azonosak, úgy tűnik, hogy az iteratív elképzelés nem felelős, hanem jogosabb úgy fogalmazni, hogy az elv igazsága már az elképzelés megfogalmazása előtt is tökéletesen nyilvánvaló számunkra (bármi legyen is ennek az oka). Ha mindenáron ragaszkodunk hozzá, mondhatjuk ugyan, hogy az elv éppen a nyilvánvalósága miatt része az iteratív felfogásnak, de vegyük észre, hogy milyen könnyen „leválasztható" az elmélet többi részéről: ha $\forall x \forall y(\forall z(z \in x \equiv z \in y) \supset x = y)$-t egy újabb axiómának tekintenénk, akkor $Z^-$ elmélet egyetlen további axiómájának levezetésében sem használnánk, és – eltérően a végtelenségi axiómától – ennek levezetésében sem használnánk $Z^-$ egyetlen további axiómáját sem.

Miután megadtuk és kifejtettük az $S$ elmélet axiómáit, eljött az ideje, hogy levezessük belőlük a Zermelo-féle halmazelméletet az extenzionalitási és a kiválasztási axióma kivételével (a részletek nagy részét a függelékben adom meg). Figyelemre méltó, hogy $Z^-$ minden axiómája levezethető $S$ ben, még akkor is, ha ezek közé számítjuk a *regularitási* vagy *jólfundáltsági* axiómákat, vagyis a halmazelmélet nyelvének $\exists x A(x) \supset \exists x(A(x)\ \&\ \forall y(y \in x \supset {\sim} A(y)))$ formuláit is. Ezek között a formulák között van az is, amit néha *a* regularitási axiómának szoktak nevezni, nevezetesen a $\exists x(x \in z) \supset \exists x(x \in z\ \&\ \forall y(y \in x \supset y \notin z))$ formula. Elsőként Dana Scott vette észre azt a figyelemreméltó tényt, hogy $S$-ben ezek az axiómák levezethetőek *még akkor is, ha S axiómái között nem szerepel lépések feletti indukciós elvet kifejező axiómaséma.*[7] Valóban, minden $\exists s P(s) \supset \exists s(P(s)\ \&\ \forall t(t < s \supset {\sim} P(t)))$ formula – nevezzük azt a sémát, amelynek ilyen formulák az esetei „lépések feletti indukciónak" – bizonyítható $S$-ben, és a regularitási axiómák ezekből levezethetőek.

Vegyük észre, hogy $S$ axiómái még együttvéve sem keltik az emberben egy indukciós elv „benyomását". Az a tény, hogy az $S$ elméletben a lépések feletti indukció és a regularitási axiómaséma levezethető, leginkább annak az általános logikai tapasztalatnak a fényében meglepő, amely alapján hajlamosak vagyunk egy indukciós elvről azt feltételezni, hogy nem vezethető le magának az indukciós elvnek explicit vagy implicit feltételezése nélkül. Ha például valaki azt kívánja bizonyítani, hogy a (valódi) természetes számokra igaz a matematikai indukció, akkor jellegzetes módon VAGY olyan objektumokként *határozza meg* őket, amelyek kielégítenek valamiféle induktív

[7] [Scott 1974].

feltételt – ahogyan például Frege és Russell teszi, amikor úgy határozza meg a természetes számokat, hogy azok minden olyan osztálynak elemei, melyeknek eleme a nulla és zártak a rákövetkezésrelációra nézve – és ebben az esetben az illetőnek hivatkoznia kell (az elméleten kívül) az indukcióra annak megmutatásakor, hogy a valódi természetes számok mindazokkal az érdekes tulajdonságokkal bírnak, amelyekkel azok az objektumok, amelyeket úgy definiáltunk, hogy kielégítsék a feltételt; VAGY azon az elméleten belül kötünk ki egy indukciós elvet, amelyben bizonyítani szeretnénk, hogy a számokra alkalmazható az indukció. Az utóbi módon járunk el akkor, amikor a halmazelméletben feltesszük a regularitási axiómát, majd a rendszámokat úgy határozzuk meg, mint olyan tranzitív halmazokat, amelyeknek minden eleme maga is tranzitív, a természetes számokat pedig olyan rendszámokként definiáljuk, amelyek vagy a nullával azonosak vagy olyan rákövetkező rendszámok, amelyeknek minden eleme szintén vagy a nullával azonos vagy rákövetkező rendszám, és ezután a regularitást felhasználva bizonyítjuk a rendszámok valamint ezzel együtt az így definiált természetes számok jólfundáltságát. Azt a sejtésünket, hogy az indukciót mindig fel kell használnunk, ha az indukciót le akarjuk vezetni, megerősíthetik Hume-nak a „tapasztalati" indukció igazolására vonatkozó észrevételei is (és más olyan szkeptikus filozófiai írások, amelyek hajlamosak azt a nézetet elfogadni, hogy egyetlen fontos filozófiai elv – amilyen például az anyagi világ létezése – sem bizonyítható magánál az elvnél látszólag gyengébb előfeltevésekből kiindulva), valamint talán Lewis Caroll *Akhilleusz és a teknős* című írása vagy Poincaré, Quine és Wittgenstein írásai, továbbá bizonyára az a közismert tény is, hogy az aritmetikának azok a rendszerei, amelyek nem tartalmaznak indukciót elképesztően gyengék. Mindezen jól ismert tények és értelmes megfontolások ellenére éppen azt próbáljuk megmutatni, hogy van egy olyan indukciós elv, amelyet olyan további elvekből vezetünk le, amelyek maguk sehogyan sem jellemezhetőek indukciós elvként. (A filozófusok előreláthatóan azt fogják állítani, hogy *Spec* „valójában" álcázott indukciós elv.)

A tanulság: néha *lehetséges* anélkül megkapni egy indukciós elvet, hogy azt korábban feltételeztük volna.[8]

Most megmutatjuk, hogyan történik a levezetés. Ennek során Schoenfield *Handbook*-beli cikkének gondolatmenetét követjük:[9]

DEFINÍCIÓ
*$y$ minimális eleme $x$-nek*, ha $y \in x$ és $\forall z \sim(z \in x \,\&\, z \in y)$.

DEFINÍCIÓ
*$y$ megalapozott*, ha minden halmaznak, amelynek $y$ eleme van minimális eleme.

Ha $y$ minden eleme megalapozott, akkor $y$ maga is megalapozott. (Logika: Tegyük fel, hogy $y \in x$. Ha valamely $z$-re $z \in x$ és $z \in y$, akkor $z$ megalapozott, és $x$-nek van minimális eleme. Különben $\forall z \sim(z \in x \,\&\, z \in y)$; de ekkor $y$ minimális eleme $x$ nek.)

DEFINÍCIÓ
$aRs$ akkor és csak akkor, ha $\forall y(y \in a \equiv y$ megalapozott $\&$ $yBs)$.

NÉHÁNY KIEMELT ÁLLÍTÁS:

1. *Spec* miatt minden $s$ lépéshez van olyan $a$, hogy $aRs$.

2. Ha $aRs$, akkor – lévén $a$ minden eleme megalapozott – $a$ is megalapozott.

3. *When* következtében ha $aRs$ akkor $aFs$.

4. Így, ha $t < s$, $aRs$ és $bRt$, akkor 2. miatt $b$ megalapozott, 3. miatt $bFt$, s így $bBs$, tehát $b \in a$.

LÉPÉSEKRE VONATKOZÓ INDUKCIÓ:
$\exists sP(s) \supset \exists s(P(s) \,\&\, \forall t(t < s \supset \sim P(t)))$

[8] Lásd ehhez [Boolos 1971b].
[9] [Schoenfield 1978], különösen 327. p.

*Bizonyítás:* Tegyük fel, hogy $P(r)$. Ha minden olyan $u$-ra, amelyre $u < r$, $\sim P(u)$, akkor készen vagyunk. Tegyük tehát fel, hogy $u < r$ és $P(u)$. *Spec* miatt valamely $x$-re $\forall a(a \in x \equiv \exists s(s < r \mathbin{\&} aRs \mathbin{\&} P(s) \mathbin{\&} aBr))$. 3. és $B$ definíciója szerint $\forall a(a \in x \equiv \exists s(s < r \mathbin{\&} aRs \mathbin{\&} P(s)))$. Mivel $u < r$ és $P(u)$, $x$ 1. miatt nem üres. 2. miatt azonban $x$ minden eleme megalapozott. Így $x$-nek van egy $a$ minimális eleme, és valamely $s$-re $s < r$, $aRs$ és $P(s)$. Tegyük most fel, hogy $t < s$. 1. miatt valamely $b$-re $bRt$ és 4. miatt $b \in a$. *Tra*-ból következik $t < r$. Ha $P(t)$, akkor $b \in x$, ami ellentmondás, mivel $a$ és $x$ diszjunktak, így $\sim P(t)$.□

A regularitás, azaz $\exists x A(x) \supset \exists x(A(x) \mathbin{\&} \forall y(y \in x \supset \sim A(y)))$ közvetlenül következik a lépésekre vonatkozó indukcióból: Tegyük fel, hogy $A(x)$. *All* miatt valamely $s$-re $xFs$, így $\exists s \exists x(A(x) \mathbin{\&} xFs)$. Lépésekre vonatkozó indukcióval, $P(s) \equiv \exists x(A(x) \mathbin{\&} xFs)$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $\exists s(\exists x(A(x) \mathbin{\&} xFs) \mathbin{\&} \forall t(t < s \supset \sim \exists x(A(x) \mathbin{\&} xFt)))$. Válasszunk egy ilyen $s$-et és $x$-et. Ekkor $A(x)$ és $xFs$. Tegyük fel, hogy $y \in x$. *When* miatt $yBt$, vagyis valamely $t$-re $t < s$ és $yFt$. Így $\sim A(y)$.

$Z^-$ többi axiómájának – vagyis a páraxiómának, az únió-, a hatványhalmaz-, a részhalmaz-axiómának és a végtelenségi axiómának – a levezetése rutinmunka, amit a függelékben fogunk elvégezni. A halmazelmélet további axiómái a kiválasztási axióma és a helyettesítési axiómák. Ezeket röviden most tárgyaljuk.

A következő gondolatmenetről azt gondolhatnánk, hogy a kiválasztási axiómáról kimutatja, hogy következik az iteratív felfogásból: Tegyük fel, hogy $x$ diszjunkt nem üres halmazok egy halmaza. Azt akarjuk kimutatni, hogy van olyan $y$ halmaz, amelynek pontosan egy közös eleme van $x$ minden elemével. Legyen $s$ egy olyan lépés, amely során $x$-et képeztük. Ekkor $x$ elemeit $s$-nél korábban képeztük, és a tranzitivitás miatt *ezen elemek* elemeit szintén $s$-nél korábban képeztük. Nyilvánvaló, hogy

($*$) léteznek olyan halmazok, amelyek mindegyike $x$ egy elemének az eleme, nincsen közöttük két olyan, amely $x$ ugyanazon elemének az eleme, és amelyek között $x$ minden elemének van legalább egy eleme.

Mivel ezeknek a halmazoknak mindegyike $x$ elemeinek egy eleme, ezért mindegyiket $s$ előtt képeztük, és így létezik egy olyan $y$ halmaz, amelynek ezek elemei, más halmazok viszont nem.

Annak a feltevésnek, hogy ez az érv megmutatja a kiválasztási axióma levezethetőségét, egyetlen szépséghibája, hogy az elfogadhatósága nagymértékben függ ($*$)-tól. Bármennyire nyilvánvalónak tűnik is ($*$), annak számára, aki kételyeket táplál a kiválasztási axiómával szemben, ($*$) igazsága is ugyanígy kétséges lesz; aki hajlamos azt gondolni, hogy nem szükségképpen létezik olyan halmaz, amelynek pontosan egy közös eleme van $x$ minden elemével, aligha fogja feltételezni, hogy lennie kell olyan halmazoknak, amelyek létezését ($*$) állítja. Lehetséges, hogy ($*$) tökéletesen nyilvánvaló, de nem az *iteratív felfogás* az, amely ($*$) vagy a kiválasztási axióma fennállását biztosítja. Akár tekintetbe vesszük az iteratív felfogást, akár nem, ($*$) mindenképpen nyilvánvaló. Az érv azonban ($*$) nélkül csak annyit mutat, hogy $x$ tetszőleges $y$ kiválasztási halmazát $x$-nél magánál nem képezzük később, de azt már nem, hogy van is valamilyen kiválasztási halmaz. Mindez számomra azt mutatja, hogy az iteratív felfogás semmilyen igazolást nem nyújt a kiválasztási axióma számára.

*The Iterative Conception of Set* című írásomban azt állítottam, hogy az iteratív felfogás egy formalizációja még az első nem rekurzív rendszámnak megfelelő lépés létezését sem biztosítja, és ennek megfelelően azt mondtam, hogy a helyettesítés nem következik az iteratív felfogásból. (Az bizonyos, hogy $S$ nem vonja maga után ezt az axiómát, de $S$ a felfogás tartalmának csak egy részét formalizálja.) Az irodalomban található érvek, amelyek szerint a helyettesítési axiómák minden további elv segítségül hívása nélkül levezethetőek az iteratív felfogásból, számomra még mindig nem tűnnek meggyőzőnek, de most nem vizsgálom meg ezeket.

Ha $S$-t úgy akarjuk kiterjeszteni, hogy következzen belőle a helyettesítés, akkor megpróbálhatjuk azt a kategóriaelméletből ismerős elvet alkalmazni, amely szerint a *bennfoglaltság* nem más, mint az *injektív beleképezhetőség* egy fajtája. Tegyük fel ennek megfelelően – $S$ egy másodrendű változatát használva –, hogy *Spec* előtagját $\forall y(Xy \supset yBs)$-ről, amely azt fejezi ki, hogy az $X$ halmazok bennfoglaltatnak az $s$ lépésnél korábban képzett halmazok között, egy olyan formulára cseréljük, amely azt fejezi ki, hogy az $X$ halmazok injektíve beleképezhetőek az ily módon képzett halmazokba: $\exists R(\forall y \forall y' \forall z \forall z'(Ryz \mathbin{\&} Ry'z' \supset (y = y' \equiv z = z')) \mathbin{\&} \forall y(\exists z Ryz \equiv Xy) \mathbin{\&} \forall z(\exists y Ryz \supset zBs))$. Nevezzük az eredményül kapott elméletet $S^+$-nak. Ekkor *Spec* közvetlenül visszenyerhető: legyen $R$ az $X$-en értelmezett azonosságreláció. $S^+$ elsőrendű változatában a $\exists R$ egzisztenciális kvantifikáció kiesik és $R$ sémaváltozóvá válik. Ekkor a „kölcsönösen egyértelmű helyettesítés" halmazelméletben megfogalmazott sémája – amelyben a helyettesítésnek azt a feltételét, hogy a releváns formula egy halmazokon értelmezett függvényt határozzon meg, annak megkövetelésévé erősítjük, hogy a formula egy *kölcsönösen egyértelmű* függvényt határozzon meg – közvetlenül következik $S^+$-ben. Mivel a (közönséges) helyettesítés következik a kölcsönösen egyértelmű helyettesítésből, valamint a részhalmaz-, a hatványhalmaz- és az extenzionalitási axiómákból, a helyettesítés levezethető az extenzionalitással kiegészített $S^+$-ban.

A legnagyobb mértékben kétségesnek tűnik, vajon helyénvaló-e az $S$ elmélet ily módon történő megerősítéséről azt gondolni, hogy az – az iteratív felfogáson felül – nem foglal magában valamilyen egyéb elvet is. Mindenesetre most egy teljesen más halmazfelfogást fogunk szemügyre venni, amelyből a helyettesítési axióma közvetlenül következik.

Frege elképzeléséről van szó, amelyet az antinómiák elkerülése végett megfelelően módosítunk.

Frege szerint minden $F$ *fogalomhoz* kapcsolódik egy bizonyos $'F$ objektum, amely az $F$ fogalom terjedelme. Ezenfelül Frege *Az aritmetika alaptörvényei* című munkájának (V) szabálya szerint a fogalmak terjedelme akkor és csak akkor azonos, ha a fogalmak pontosan ugyanazokra a dolgokra alkalmazhatóak: $'F = 'G \equiv \forall x(Fx \equiv Gx)$. Russell kimutatta, hogy az (V) szabály inkonzisztens. (Frege bizonyítása: Legyen $F$ a $[x : \exists G(x = 'G \,\&\, {\sim} Gx)]$ fogalom. Ekkor ha ${\sim} F'F$, akkor $\forall G('F = 'G \supset G'F)$, és így $F'F$; de ekkor néhány $G$-re $'F = 'G$ és ${\sim} G'F$. Az (V) szabály balról jobbra azt adja, hogy $\forall x(Fx \equiv Gx)$, és így azt, hogy $G'F$, vagyis ellentmondáshoz jutottunk.) Az objektumok, a fogalmak és a terjedelmek fregei elképzelését kényelmesen tudjuk szimulálni a másodrendű logika keretei között (ahogyan azt már el is kezdtük). Tegyük fel, hogy $*$, $'$-höz hasonlóan egy művelet jele, amely egy fogalmak felett futó (másodrendű) változóra alkalmazva objektumok felett futó (elsőrendű) változót eredményez, és fektessük le az (V) szabály egy megfelelően módosított változatát, amely $*$ használatát fogja szabályozni. A változtatás a méret korlátozásának azt a gondolatát tükrözi, amelyet Cantornak, Russellnek, Neumann-nak és Bernaysnek köszönhetünk, és amely azt fogalmazza meg, hogy a túl sok elemet tartalmazó objektumok rendellenes módon viselkednek, talán azért, mert nem tartoznak semmihez sem, talán azért mert nem léteznek. Az (V) szabály általunk módosított változata szerint az összes ilyen túlnépesített objektum egymással azonosnak fog bizonyulni.

Legyen $F$ és $G$ fogalom. Azt fogjuk mondani, hogy $F$ *belefér* $G$-be, ha az $F$ alá eső objektumok kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetőek az összes $G$ alá eső objektumnak, vagy néhánynak azok közül, vagyis ha $\exists R(R : F \underset{1\text{-}1}{\longrightarrow} G)$.[10]

Legyen $V$ az $[x : x = x]$ bármely objektumra alkalmazható fogalom. Minden fogalom belefér $V$-be. Akkor és csak akkor fogjuk azt mondani, hogy egy $F$ fogalom *kicsi*, ha $V$ nem fér bele $F$-be. Természetesen $V$ nem kicsi. Ha $F$ kicsi és $\forall x(Gx \supset Fx)$, akkor $G$ is kicsi. Habár nem fogjuk a későbbiekben használni, de bebizonyítható (a Schröder–Bernstein-tétel bizonyításának egy változatával) az a tény, hogy ha $V$ belefér $F$-be, akkor az $F$ alá eső objektumok kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésbe hozhatóak az összes objektummal.

Nevezzük az $F$ és a $G$ fogalmakat *azonos terjedelműnek*, ha

[10] Az $R : F \underset{1\text{-}1}{\longrightarrow} G$ formula a $\forall y \forall y' \forall z \forall z'(Ryz \,\&\, Ry'z' \supset (y = y' \equiv z = z')) \,\&\, \forall y(Fy \equiv \exists z(Gz \,\&\, Ryz))$ formula rövidítése.

ugyanazok az objektumok tartoznak alájuk: $\forall x(Fx \equiv Gx)$. Nevezzük $F$ fogalmat $G$-hez *hasonlónak* – jelekkel kifejezve: $F \sim G$ – akkor és csak akkor, ha vagy sem $F$, sem $G$ nem kicsi, vagy pedig $F$ és $G$ azonos terjedelműek; vagyis akkor és csak akkor, ha ($F$ kicsi $\vee$ $G$ kicsi $\supset \forall x(Fx \equiv Gx)$). A hasonlóság nyilvánvalóan szimmetrikus és reflexív. Tranzitív is: tegyük fel, hogy $F \sim G$ és $G \sim H$. Ekkor ha $F$ kicsi, akkor $\forall x(Fx \equiv Gx)$, tehát $G$ is kicsi, $\forall x(Gx \equiv Hx)$, és így $\forall x(Fx \equiv Hx)$. Ha $H$ kicsi, akkor hasonlóan $\forall x(Fx \equiv Hx)$. Így a hasonlóság olyan ekvivalenciareláció, amely megtartja a kicsiség tulajdonságát.

Most minden $F$ fogalomhoz hozzákapcsolunk egy $^*F$ objektumot, amelyet $F$ *érvényességi körének* fogunk nevezni. Feltételezzük, hogy az érvényességi körök használatát Frege (V) szabályának a következő módosított változata (új V) szabályozza:

(új V) $\quad \forall F \forall G(^*F = {}^*G$ akkor és csak akkor, ha $F \sim G)$.

Nevezzük *FN* (Frege–Neumann-) elméletnek azt a másodrendű elméletet, amelyet úgy kapunk, hogy a szokásos másodrendű logika axiómáihoz hozzávesszük (új V)-t.

Gyorsan oszlassunk el minden kétséget *FN* konzisztenciájára vonatkozóan azzal, hogy megadjuk az elmélet egy $M$ modelljét. A modell univerzuma a természetes számok halmaza, $^*$-ot a következőképpen interpretáljuk: ha $F$ alá véges sok objektum esik, akkor legyen $^*F$ értéke $n + 1$, ahol $n$ az a szám, amelynek a kettes számrendszerbeli alakjában akkor és csak akkor van 1 a $2^k$ helyiértékű helyen, ha $k$ $F$ alá esik; ha azonban végtelen sok objektum esik $F$ alá, akkor legyen $^*F$ értéke nulla. Ekkor (új V) fennáll $M$-ben; mi több, $F$ akkor és csak akkor „kicsi" $M$-ben, ha véges sok dolog esik $F$ alá.

Legyen $\emptyset$ a $[x : x \neq x]$ fogalom, és legyen $0 = {}^*\emptyset$. Mivel létezik legalább egy objektum (például $^*V$ vagy $^*\emptyset$), ezért $\emptyset$ kicsi, $\emptyset \nsim V$, és $0 \neq {}^*V$. Így létezik legalább két objektum. Tetszőleges $y$ objektumra, pontosan egy objektum esik az $[x : x = y]$ alá; így $[x : x = y]$ kicsi. Legyen $sy = {}^*[x : x = y]$. Ekkor bármely $y$-ra $0 \neq sy$, mivel $[x : x \neq x]$ kicsi, de $\sim \forall x(x \neq x \equiv x = y)$; valamint ha $sy = sz$, akkor $y = z$, mivel $[x : x = y]$

kicsi, és így $\forall x(x = y \equiv x = z)$. Az aritmetika ennélfogva *FN*-ben kivitelezhető, például úgy, ahogy a *Was sind und was sollen die Zahlen?* című műben Dedekind tette. Fregét és Russellt követve, legyen $N$ a $[x : \forall F((F0 \mathbin{\&} \forall y(Fy \supset Fsy)) \supset Fx)]$ fogalom.

Ezek után szeretnénk a halmazelmélet egy részét *FN*-ben kidolgozni. Először is legyen $y \in x$ akkor és csak akkor, ha $\exists F(x = {}^*F \mathbin{\&} Fy)$. Ekkor ${}^*V \in {}^*V$. $y \in x$-et a szokásos módon olvashatjuk („$y$ eleme $x$ nek", „$x$ tartalmazza $y$-t" stb.).

Tegyük fel, hogy $F$ kicsi. Ebben az esetben, ha $y \in {}^*F$, akkor valamely $G$-re ${}^*F = {}^*G$ és $Gy$; ám ekkor $F \sim G, \forall y(Fy \equiv Gy)$ és $Fy$. Megfordítva, ha $Fy$, akkor biztos, hogy $y \in {}^*F$. Így ha $F$ kicsi, akkor $y \in {}^*F$ akkor és csak akkor, ha $Fy$.

Ha $F$ nem kicsi, akkor mivel sem $F$ sem $V$ nem kicsi, $F \sim V$, és ${}^*F = {}^*V$; ám ekkor – mivel ${}^*V \in {}^*V$ – ${}^*V \in {}^*F, {}^*F \in {}^*V$ és ${}^*F \in {}^*F$.

Következésképp ha $F$ az $[x : x \neq {}^*V]$ fogalom, akkor $\sim F^*V$. De mivel $V$ belefér $F$-be (képezzük le ${}^*V$-t 0-ra, és minden $x$-et, amelyre $Nx$, képezzünk $sx$-re, továbbá minden más objektumot képezzünk önmagára), ezért $F$ nem kicsi, és így ${}^*V \in {}^*F$. Általában, ha $F$ nem kicsi és nem azonos terjedelmű $V$-vel, akkor – bár $\sim \forall x(Fx \equiv Vx)$ – mégis $\forall x(x \in {}^*F \equiv x \in {}^*V)$.

Legyen $x$ definíció szerint akkor és csak akkor *halmaz*, ha $\exists F(F \text{ kicsi} \mathbin{\&} x = {}^*F)$; a halmazok így a kicsi fogalmak érvényességi körei. 0 halmaz, de ${}^*V$ nem. Ha ${}^*F$ halmaz, akkor valamely kicsi $G$-re ${}^*F = {}^*G$ és $F$ kicsi; így $z \in {}^*F$ akkor és csak akkor ha $Fz$.

Ha $x$ egy halmaz, mondjuk $x = {}^*F$, ahol $F$ kicsi, akkor $F$ és $[z : z \in {}^*F]$ azonos terjedelmű és kicsi, így $x = {}^*F = {}^*[z : z \in {}^*F] = {}^*[z : z \in x]$. Ennek megfelelően ha $x$ és $y$ olyan halmazok, amelyeknek ugyanazok az elemei, akkor $[z : z \in x]$ és $[z : z \in y]$ azonos terjedelműek és kicsik, s így $x = {}^*[z : z \in x] = {}^*[z : z \in y] = y$, tehát az extenzionalitás fennáll.

Teljesül a részhalmaz-axióma is: Legyen $z$ egy halmaz, mondjuk legyen $z = {}^*F$. Legyen $G = [y : y \in z \mathbin{\&} Xy]$. Ekkor $\forall y(Gy \supset Fy)$ és $G$ kicsi. Legyen $x = {}^*G$. Ekkor $\forall y(y \in x \equiv y \in z \,\&\, Xy)$.

Fennáll továbbá az is, hogy tetszőleges $w$ objektumhoz és $x$ halmazhoz, van olyan $x + w$ halmaz, amelynek az elemei éppen $w$ és $x$ elemei (ezt néha *adjunkciós* axiómának nevezik): tegyük fel, hogy $V$ belefér $[y : Fy \vee y = w]$-be, vagyis hogy valamely $R$-re $R : V \underset{\text{1-1}}{\longrightarrow} [y : Fy \vee y = w]$. Ekkor $V$ belefér $F$-be is. Ugyanis azután, hogy $R$-nek legfeljebb két értékét felcseréltük, feltehetjük hogy $R(0) = w$, és ekkor már látható, hogy $[y : y \neq 0]$ belefér $F$-be. Mivel azonban $[xy : y = sx] : V \underset{\text{1-1}}{\longrightarrow} [y : y \neq 0]$, $V$ belefér $F$-be. Így ha $x = {}^*F$ és $F$ kicsi, akkor $[y : Fy \vee y = w]$ szintén kicsi, tehát az adjunkció teljesül.

Az adjunkciós axiómából következik, hogy tetszőleges $x$ halmazhoz van egy halmaz ($x$ Neumann-követője), amely éppen $x$-et és $x$ elemeit tartalmazza. A páraxióma, amely szerint bármely két $w$ és $z$ objektumhoz van egy $\{w, z\}$ halmaz, amelyik éppen $w$-t és $z$-t tartalmazza, szintén az adjunkciós axióma közvetlen következménye: $\{w, z\} = (0 + w) + z$.

Vegyük észre, hogy bár ${}^*V$ nem halmaz, $s^*V$ igen. Így néhány nem üres halmaz nem tartalmaz egyetlen halmazt sem. Ebből következik, hogy az unióaxióma, amely azt állítja, hogy bármely $z$ halmazhoz van egy olyan halmaz, amely éppen azokat a halmazokat tartalmazza, amelyeket $z$ elemei tartalmaznak, nem áll fenn: $s^*V$ ellenpéldát ad. Lévynek köszönhető az a meglepő eredmény, hogy az unióaxióma egy megfelelően módosított változata viszont következik *FN*-ből.[11] Ahhoz, hogy megkapjuk ezt a módosított változatot, valamint hogy *FN*-ben le tudjuk vezetni a halmazelmélet egy megfelelő változatát, szükségünk van a *tiszta* objektum fogalmára.

Rövidítsük a $\exists F x = {}^*F$ formulát $Ax$-szel ($x$ egy alkalmazási kör). Így $Ax$ esetén $x$ akkor és csak akkor halmaz, ha $x \neq {}^*V$.

Mondjuk azt, hogy $F$ *zárt*, ha $\forall y((Az \& \forall z(z \in y \supset Fz)) \supset Fy)$.

Továbbá akkor és csak akkor nevezzük $x$-et *tisztának*, ha $\forall F(F \text{ zárt} \supset Fx)$.

[11] [Lévy 1968], 762–763. p.

1. TÉTEL
Tegyük fel, hogy $Ax$ és $\forall y(y \in x \supset y$ tiszta). Ekkor $x$ tiszta.

*Bizonyítás:* Legyen $F$ zárt. Mutassuk meg, hogy $Fx$. Mivel minden $y \in x$ tiszta, ezért minden $y \in x$-re $Fy$. Mivel azonban $Sx$ és $F$ zárt, ezért $Fx$. □

2. TÉTEL
Tegyük fel, hogy $x$ tiszta. Ekkor $x$ halmaz (tehát $\neq {}^*V$) és $x$ minden eleme tiszta.

*Bizonyítás:* Jelöljük $G$-vel $[x : x$ halmaz $\& \forall z(z \in y \supset z$ halmaz $\&$ $z$ tiszta)]-t. Mutassuk meg, hogy $G$ zárt. Tegyük fel, hogy $Ay$, továbbá $\forall z(z \in y \supset Gz)$. Ekkor $Gy$; ugyanis tegyük fel, hogy $y$ nem halmaz; ekkor, mivel $Ay$, ezért $y = {}^*V$, $y \in y$, és így $Gy$, tehát $y$ halmaz. Tehát $y$ halmaz. Tegyük fel továbbá, hogy $z \in y$. Ekkor $Gz$, tehát $z$ halmaz. Megmutatjuk, hogy $z$ tiszta. Legyen $F$ zárt és mutassuk meg, hogy $Fz$. Mivel $Gz$, $\forall a(a \in z \supset a$ tiszta ). Mivel $z$ halmaz, $Az$. Az 1. tétel szerint ekkor $z$ tiszta. Így $Gy$ és ezért $G$ zárt. Mivel $x$ tiszta, ezért $Gx$, és így $x$ halmaz, és minden eleme tiszta. □

Az 1. és a 2. tételből következik, hogy $x$ akkor és csak akkor tiszta, ha $x$ halmaz és $x$ minden eleme tiszta. ${}^*V$ nem tiszta és nem tiszta $s^*V, ss^*V$ stb. sem.

Ha $x$ és $y$ tiszta és minden tiszta $z$ halmazra akkor és csak akkor $z \in x$, ha $z \in y$, akkor *minden* $z$ re $z \in x$ akkor és csak akkor, ha $z \in y$, tehát az extenzionalitás miatt $x = y$. Vagyis az extenzionalitás érvényes marad akkor is, ha megszorítjuk tiszta halmazokra, és ugyanez áll a részhalmaz-axiómára és az adjunkcióra is.

Mivel a tiszta halmazok minden eleme tiszta, belátható, hogy fennáll egy tiszta halmazok felett értelmezett indukciós elv:

$$\exists x(x \text{ tiszta } \& \ Gx) \supset \exists x(x \text{ tiszta } \& \ Gx \ \& \ \forall y(y \in x \supset \sim Gy)).$$

*Bizonyítás:* Ha $\forall x \forall y((y \in x \supset Fy) \supset Fx)$, akkor $F$ biztosan zárt és így $\forall x(x$ tiszta $\supset Fx)$. Következésképp ha valamely $x$-re $x$ tiszta és $Gx$, akkor valamely $x$-re $x$ tiszta és ($x$ tiszta és $Gx$), így

$\sim(x$ tiszta és $Gx)$-et helyettesítve $Fx$ helyére azt kapjuk, hogy valamely $x$-re $x$ tiszta, $Gx$ és $\forall y(y \in x \supset \sim(x \text{ tiszta } \& \ Gy))$. Mivel $x$ minden eleme tiszta, $\forall y(y \in x \supset \sim Gy)$. □

A regularitás tehát (még sémaként is) fennáll, ha megszorítjuk tiszta halmazokra. $s^*V$ ellenpélda a nem megszorított regularitásra, amely azt állítja, hogy tetszőleges nem üres $x$ halmaz tartalmaz olyan elemet, amelynek nincs közös eleme $x$-szel.

A megszorított regularitási elvből következik, hogy egyetlen tiszta halmaz sem eleme önmagának; különben lenne olyan tiszta halmaz, amely eleme önmagának, de nincs olyan eleme, amely eleme önmagának.

Nevezzük $x$-et *tranzitív*nak, ha $x$ elemeinek minden eleme $x$-nek is eleme: $\forall x \forall y(z \in y \in x \supset z \in x)$. Mondjuk továbbá azt, hogy $x$ rendszám, ha $x$ tiszta, tranzitív és minden eleme is tranzitív.

3. TÉTEL

*Tegyük fel, hogy $x$ rendszám, és hogy $y \in x$. Ekkor $y$ is rendszám.*

*Bizonyítás:* Mivel $x$ tiszta, $y$ is tiszta. Mivel $x$ minden eleme tranzitív, $y$ is tranzitív. Ha $z \in y$, akkor $x$ tranzitivitása miatt $z \in x$ és így $z$ tranzitív. Így $y$ minden eleme tranzitív. □

Mivel a rendszámoknak csak rendszámok az elemei, ezért a tiszta halmazokon értelmezett indukciós elvből következik egy rendszámok felett értelmezett indukciós elv:

$$\exists x(x \text{ rendszám } \& \ Gx) \supset \exists x(x \text{ rendszám } \& \ Gx \ \& \ \forall y(y \in x \supset \sim Gy)).$$

A szokásos kettős indukció segítségével megmutatható, hogy $\in$ a rendszámokon összefüggő; mivel a rendszámok tranzitívak, $\in$ is tranzitív a rendszámokon. Mivel $\in$ a rendszámokon irreflexív is, $\in$ szigorú értelemben jólrendezi rendszámokat.

Most felhasználjuk azt az érvelést, amely a Burali-Forti-paradoxonhoz vezet.

Legyen $Rsz$ az a fogalom, hogy $[y : y \text{ rendszám}]$.

4. TÉTEL

*$Rsz$* nem kicsi.

*Bizonyítás:* Tegyük fel a tétel ellenkezőjét. Legyen $x = {}^*Rsz$. Ekkor $x$ halmaz és így minden $y$-ra $y \in x$ akkor és csak akkor, ha $y$ rendszám. Tehát $x$ minden eleme tiszta és $Ax$; az 1. tétel szerint $x$ tiszta. Ha $z \in y \in x$ akkor $y$ rendszám, $z$ is rendszám és így $z \in x$, tehát $x$ tranzitív. Továbbá ha $y \in x$, akkor $y$ rendszám, és $y$ tranzitív. Így $x$ minden eleme tranzitív. Ebből következik, hogy $x$ rendszám, és így $x \in x$, ami lehetetlen, hiszen $x$ tiszta. □

Mivel $Rsz$ nem kicsi, van olyan $R$, hogy $R : V \underset{1\text{-}1}{\longrightarrow} Rsz$. És mivel a rendszámokat $\in$ jólrendezi, a globális kiválasztási axióma közvetlenül adódik (Neumann). A szokásos kiválasztási axióma (lokális kiválasztási axióma) különféle változatai következnek a globálisból és a részhalmaz-axiómából, éppen úgy, ahogyan a tiszta halmazokra való megszorításuk is.

A helyettesítési axióma, valamint a megszorítása szintén közvetlenül adódik. Legyen $w$ halmaz, $F$ pedig függvény. Tegyük fel, hogy $R : V \underset{1\text{-}1}{\longrightarrow} [z : \exists y(y \in w \& Fyz)]$. A (lokális) kiválasztási axióma szerint van olyan $S$, hogy $S : V \underset{1\text{-}1}{\longrightarrow} [y : y \in w]$, ami lehetetlen, mivel $w$ halmaz. Így $[z : \exists y(y \in w \& Fyz)]$ kicsi. Legyen $x = {}^*[z : \exists y(y \in w \& Fyz)]$. Ekkor $\forall z(z \in x \equiv \exists y(y \in w \& Fyz))$.

Lévy meglepő bizonyítása, hogy az únióaxióma felesleges a halmazelmélet Neumann-féle rendszerében most is alkalmazható annak bizonyítására, hogy az axiómának a tiszta halmazokra való megszorítása *FN* egy tétele. Így *FN* szerint tetszőleges tiszta $z$ halmazhoz van olyan tiszta halmaz, amely éppen $z$ elemeinek az elemeit tartalmazza. (A 2. tétel szerint egy tiszta halmaz elemei is tiszták.) A bizonyításhoz emlékezzünk vissza arra, hogy *FN*-ben bizonyítani lehet a Neumann-követő létezését; a bizonyítás hátralevő része ugyanúgy megy, mint Lévy előbb idézett cikkében.

Összegzésképpen hasonlítsuk össze az iteratív felfogást és *FN*-t abban a tekintetben, hogy miként viszonyulnak a halmazelmélet axiómáihoz és axiómasémáihoz.

*Extenzionalitás:* Nyilvánvaló, de érveink szerint nem az iteratív felfogás teszi azzá. *FN*-nek közvetlen következménye.

*Üres halmaz:* Az iteratív felfogás szerint evidens. *FN*-nek közvetlen következménye.

*Páraxióma:* Az iteratív felfogás szerint evidens. *FN*-nek közvetlen következménye.

*Regularitás:* Az iteratív felfogás szerint evidens. (Nem evidens azonban az, hogy a regularitás levezethető az iteratív felfogás fent megadott, gyengének tűnő *S* axiomatizálásából.) A regularitás megszorítások nélkül *FN*-ben cáfolható ($s^*V$-vel); a 'tiszta' predikátum induktív jellegének köszönhetően azonban *FN*-ben a regularitás egy megszorított változata levezethető.

*Kiválasztási axióma:* Evidens, de nem az iteratív felfogás teszi azzá. Az, hogy a globális kiválasztási axióma *FN*-ben levezethető, nem meglepő, ha tekintetbe vesszük, hogy az *FN* mögött meghúzódó egyik fő megfontolás az volt, hogy azoknak a dolgoknak, amelyek nem alkotnak halmazt csak egyféle „méretük" lehet, valamint hogy a rendszámok jólrendezettek és az összességük nem alkot halmazt.

*Helyettesítés:* Nem evidens az iteratív felfogás szerint. *FN*-ben a kiválasztási axiómából könnyen levezethető.

*Részhalmaz-axióma:* Az iteratív felfogás szerint evidens. A helyettesítésnek egyszerű logikai következménye.

*Únióaxióma:* Az iteratív felfogás szerint evidens. Megszorítások nélküli változata cáfolható *FN*-ben ($s^*V$-vel); meglepő és mélyértelmű eredmény, hogy az únióaxióma megszorított formája *FN*-ben bizonyítható.

*Végtelenség:* Az iteratív felfogás szerint evidens. Még csak nem is tétele *FN* hatványhalmaz-axiómával kiegészített változatának (a fentebb megadott *M* modellben a hatványhalmazaxióma igaz, de a végtelenségi hamis). Ahhoz, hogy megkapjuk a végtelenségi axiómát, ad hoc módon ki kell egészítenünk *FN*-t egy kicsiségi elvvel: azzal, hogy *N* kicsi.

*Hatványhalmaz:* Az iteratív felfogás szerint evidens. Még csak nem is tétele *FN* végtelenségi axiómával kiegészített változatának (ahogyan azt az öröklődően megszámlálható halmazok halmazával ügyeskedve egy keveset meg lehet mutatni.) Megkaphatjuk a hatványhalmaz-axiómát úgy is, hogy az előbbihez hasonlóan egy kicsiségi elvet csatolunk *FN*-hez: $F$ kicsi $\supset [^*G : \forall x(Gx \supset Fx)]$ kicsi.

Tehát *FN* az iteratív felfogástól teljesen különböző képet foglal magában a halmazokról. Mindkét nézet képes számot adni a halmazelmélet tekintélyes részéről, ám ugyanakkor mindkettő figyelmen kívül hagy egy jelentős részt. Az egyik tanulság mindebből, hogy *helytelen azt gondolni, hogy a halmazelmélet egésze,* vagyis *ZF* a kiválasztási axiómával együtt *következik az iteratív felfogásból.* Azok az axiómák, amelyek nem következményei ennek az elképzelésnek a halmazelmélet bármely ésszerű továbbfejlesztésének nélkülözhetetlen kellékei (a kiválasztási axióma nélkül a számosságok elmélete töredékes lenne), és van egy olyan alternatív elmélet, amelynek ezek az axiómák következményei (amelyekből azonban *ZF* két fontos axiómája nem következik). Mindebből talán azt a következtetést kell levonnunk, hogy a halmazelmélet axiómarendszere mögött legalább kétféle elgondolás húzódik meg.

## FÜGGELÉK

*Páraxióma*: $\forall z \forall w \exists x \forall y(y \in x \equiv (y = z \vee y = w))$. *All* miatt van olyan $s$ és $t$, hogy $zFs$ és $wFt$. *Net* szerint valamely $r$-re $s < r$ és $t < r$. Így $zBr$ és $wBr$. Ám ekkor *Spec* miatt $\exists x \forall y(y \in x \equiv ((y = z \vee y = w) \,\&\, yBr))$.

*Únió*: $\forall z \exists x \forall y(y \in x \equiv \exists w(y \in w \,\&\, w \in z))$. *All* miatt valamely $r$-re $zFr$. Ha $w \in z$, akkor *When*-nel azt kapjuk, hogy valamely $s$-re $s < r$ és $wFs$. Ha $y \in w$ akkor ismét csak *When*-nel valamely $t$-re $t < s$ és $yFt$, és *Tra* révén $t < r$, amiből $yBr$ adódik. Ekkor azonban *Spec* miatt $\exists x \forall y(y \in x \equiv (\exists w(y \in w \,\&\, w \in z) \,\&\, yBr))$.

*Hatványhalmaz*: $\forall z \exists x \forall y(y \in x \equiv \forall w(w \in y \supset w \in z))$. *All* miatt valamely $s$-re $zFs$. *When*-nel $\forall x(\forall w(w \in y \supset w \in z) \supset yFs)$-t kapjuk. *Net* szerint van olyan $r$, amelyre $s < r$. Így ha $\forall w(w \in y \supset w \in z)$, akkor $yBr$. De *Spec*-cel $\exists x \forall y(y \in x \equiv (\forall w(w \in y \supset w \in z) \,\&\, yBr))$-t kapjuk.

*Részhalmaz-axióma*: $\forall z \exists x \forall y(y \in x \equiv (y \in z \,\&\, A(y)))$. *All* miatt valamely $s$-re $zFs$. Ha $y \in z$, akkor *When* miatt $yBs$. De *Spec*-ből $\exists x \forall y(y \in x \equiv ((y \in z \,\&\, A(y)) \,\&\, yBs))$ következik.

*Üres halmaz*: $\exists x \forall y(y \notin x)$. Ez következik az részhalmaz-axiómából, ha $A(y)$ szerepében $y \neq y$-t vesszük. (Úgy tekintjük, hogy a logikából következően $\exists x(x = x)$ és $\exists s(s = s)$ is fennáll).

$y$ *üres halmaz*, ha $\forall z(z \notin x)$.

$z$ *követője* $y$-nak, ha $\forall w(w \in z \equiv (w \in y \vee w = y))$.

*Végtelenségi axióma*: $\exists x(\exists y(y \in x \;\&\; y$ üres halmaz $) \;\&\; \forall y(y \in x \supset \exists z(z \in x \;\&\; z$ követője $)y$-nak$))$. Az üreshalmaz-axióma miatt az üres halmaz létezik. A páraxióma és az únió miatt minden halmaznak van követője. *When* miatt minden üres halmazt minden lépésben képezünk. *When* és *Tra* miatt ha $yFt$, $t < s$, és $z$ egy követője $y$-nak, akkor $zFs$. (Tegyük fel, hogy $yFt$ és $t < s$. Ha $w \in y$, akkor *When* miatt van olyan $u$, hogy $u < t$ és $wFu$. *Tra* révén $u < s$. Ha pedig $w = y$, akkor $t < s$ és $wFt$. Ekkor *When* miatt $zFs$.) *Inf* szerint valamely $r$-hez $\exists t(t < r)$ és $\forall t(t < r \supset \exists s(t < s \;\&\; s < r))$. *Spec* miatt $\exists x \forall y(y \in x \equiv yBr)$ és ezzel készen vagyunk.

*Fordította Komorjai László*