Matematika A4, Valószínűségszámítás
2. zh 1. feladat és megoldása
2009.05.04

1. feladat

Az X valószínűségi változó eloszlása exponenciális eloszlást követ $\lambda = 3$ paraméterrel. Határozza meg az $Y = e^X$ valószínűségi változó
a) sűrűségfüggvényét!
b) szórását!
Megoldás: X eloszlásfüggvénye és sűrűségfüggvénye (**1 pont**):

$$f(x) = 3\mathrm{e}^{-3x} \quad \text{ha } x \geq 0$$
$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-3x} \quad \text{ha } x \geq 0$$

Y eloszlásfüggvénye:

$$G(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(e^X \leq y) \overset{\textbf{1 pont}}{=} \mathbb{P}(X \leq \ln y) \overset{\textbf{2 pont}}{=} 1 - \frac{1}{y^3} \quad \text{ha } \overset{\textbf{1 pont}}{y > 1},$$

sűrűségfüggvénye:

$$g(y) = G'(y) = \frac{3}{y^4} \quad \text{ha } y > 1 \qquad (\textbf{1 pont}).$$

A szórás (**1 pont**):

$$\sigma(Y) = \sqrt{\mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2}$$

ahol

$$\mathbb{E}(Y) = \int_1^\infty y \frac{3}{y^4}\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2} \qquad (\textbf{1 pont})$$

és

$$\mathbb{E}(Y^2) = \int_1^\infty y^2 \frac{3}{y^4}\,\mathrm{d}y = 3 \qquad (\textbf{1 pont}).$$

Így

$$\sigma(Y) = \sqrt{3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (\textbf{1 pont}).$$

2. feladat

A Karib-tenger kalózai egy kút mélyén tartják titkos aranypénz vésztartalékukat, amiből szükség esetén kötél és vödör segítségével tudnak aranyat felhúzni. A vödör tömege 1 kg. Minden merítés esetén véletlen tömegű arany akad a vödörbe: a tömeg eloszlása egyenletes 0 és 5 kg között. Az az idő, ameddig a kalózok a felszínre húzzák a vödröt, (percekben mérve) exponenciális eloszlást követ az akasztott tömeggel megegyező paraméterrel (terhelés = arany + vödör).
a) A vödörben levő arany tömegének ismeretében adja meg a felszínre húzás idejének feltételes sűrűségfüggvényét!
b) Számolja ki a felszínre húzás idejének (feltétel nélküli) sűrűségfüggvényét!

Megoldás.

a) (3 pont)

Jelölje x a vödörbe kerülő arany tömegét, y a vödör felhúzásának időtartamát.

$$f_{2|1}(y|x) = \begin{cases} (1+x)e^{-(1+x)y} & \text{, ha } x \in [0,5]; \quad y \in [0,\infty) \\ 0 & \text{, mindenhol máshol} \end{cases}$$

Az exponenciális eloszlás sűrűségfüggvényének ismerete 1 pont. Az (1+x) paraméter helyes megadása 1 pont, az értelmezési tartomány helyes megadása (x-é és y-é is) 1 pont.

b) (7 pont)

A felhúzás idejének sűrűségfüggvényét a közös sűrűségfüggvény y tengelyre vett vetületeként számolhatjuk ki. Ehhez azonban szükség van a vödörbe akadó arany tömegének sűrűségfüggvényére (ha az első pont eredményét használni szeretnénk).

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{, ha } x \in [0,5] \\ 0 & \text{, ha } x \notin [0,5] \end{cases}$$

Az $\frac{1}{5}$ érték helyes megadása 1 pont. (Az értelmezési tartományra már az előző pontban adtunk pontot.)

A közös sűrűségfüggvény:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{5}(1+x)e^{-(1+x)y} & \text{, ha } x \in [0,5]; \quad y \in [0,\infty) \\ 0 & \text{, mindenhol máshol} \end{cases}$$

Ha felírja a formulát, hogy a közös sűrűségfüggvény a feltételes (2|1) és a sima (1) sűrűségfüggvény szorzataként áll elő, 1 pont. Ha ezt tudja is alkalmazni és előáll a pontos képlet, 1 pont.

A felhúzás idejének sűrűségfüggvénye:

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

Ez az általános képlet 1 pont.

$$f_2(y) = \begin{cases} \int_0^5 \frac{1}{5}(1+x)e^{-(1+x)y}dx & \text{, ha } y \in [0,\infty) \\ 0 & \text{, ha } y \notin [0,\infty] \end{cases}$$

Az idevágó integrál helyes felírása 1,5 pont.

$$f_2(y) = \begin{cases} \frac{ye^{-y}-6ye^{-6y}-e^{-6y}+e^{-y}}{5y^2} & \text{, ha } y \in [0,\infty) \\ 0 & \text{, ha } y \notin [0,\infty] \end{cases}$$

A helyes számeredmény 1,5 pont.

3. feladat

Egy vezetékben az áramerősség normális eloszlást követ 2,5 amper szórással. Független mérési eredmények átlagával akarjuk tesztelni, hogy az áramerősség várható értéke 50 amper-e?
a) Adjon meg az 50 amper körül olyan szimetrikus intervallumot, melybe 25 mérési eredmény átlaga 0,95 valószínűséggel beleesik, ha az áramerősség várható értéke 50 amper!
b) Ha azt követeljük meg az eljárástól, hogy 50 amper esetén legalább 0,68 valószínűséggel helyes legyen a döntés, 49 amper alatt és 51 amper felett pedig legalább 0,975 valószínűséggel legyen helyes a döntés, akkor hány elemű mintát és milyen (az 50-re szimetrikus) intervallumot kell használnunk?
Megoldás.
a) Legyen $\overline{X} = \frac{X_1+X_2+\ldots X_{25}}{25}$ a 25 mérés átlaga. Mivel egy mérés átlaga és szórása (amperben) 50 illetve $2,5$, így $\mathbb{E}(X_1+\cdots+X_{25}) = 25\cdot 50$ és $\mathbb{D}(X_1+\cdots+X_{25}) = \sqrt{25}\cdot 50$, és $\mathbb{E}\overline{X} = 50$, $\mathbb{D}\overline{X} = 0,5$ (szórás értéke 1 pont).

$$\mathbb{P}(\overline{X} \in [50-a, 50+a]) = \Phi(\frac{50+a-50}{0,5}) - \Phi(\frac{50-a-50}{0,5}) = \Phi(2a) - (1-\Phi(2a)) = 0,95 \text{ (2 pont)}$$

Innen $\Phi(2a) = 0,975$; a táblázatból $2a = 2$ és $a = 1$, azaz a kérdéses intervallum a $[49, 51]$ (1 pont). Összesen 4 pont.

b) Meg kell adni egy $[50-a, 50+a]$ intervallumot és egy n számot úgy, hogy ha a várható érték 50, akkor egy n elemű minta átlaga ebbe az intervallumba essen $0,68$ valószínűséggel, míg ha a várható érték 51, akkor az átlag $0,975$ valószínűséggel ne essen ebbe az intervallumba. Ha a várható érték nagyobb, mint 51, akkor az utóbbi valószínűség még kisebb, ezért elég az 51-gyel foglalkozni (eddig 2 pont). Szimmetria miatt a 49 alatti esettel nem kell foglalkozni, az ugyanaz, mint az 51 feletti. (Megjegyzés: $a < 1$-et tudjuk előre, mert a $[49, 51]$ intervallumba közel $1/2$ valószínűséggel esik egy 51 várható értékű minta átlaga.)

Jelöljünk az egyszerűség kedvéért $X_1, \ldots, X_n$-nel egy 50 (amper) várható értékű mintát, $Y_1, \ldots, Y_n$-nel egy 51 várható értékű mintát. Az átlagok szórása $\mathbb{D}\overline{X} = \mathbb{D}\overline{Y} = \frac{2,5}{\sqrt{n}}$. A két feltétel (pontos felírásuk 1-1 pont):

$$\mathbb{P}(\overline{X} \in [50-a, 50+a]) = 0,68, \qquad \mathbb{P}(\overline{Y} \notin [50-a, 50+a]) = 0,975.$$

Mivel $\mathbb{E}\overline{Y} = 51$, ezért $\mathbb{P}(\overline{Y} < 50-a)$ elhanyagolható $\mathbb{P}(\overline{Y} > 50+a)$-hoz képest.

a)-hoz hasonlóan rendezzük: $2\Phi(\frac{a\sqrt{n}}{2,5}) - 1 = 0,68$ és $\frac{a\sqrt{n}}{2,5} = 1$, és a másik egyenletből $\Phi(\frac{(1-a)\sqrt{n}}{2,5}) = 0,975$ és $\frac{(1-a)\sqrt{n}}{2,5} = 2$. A két egyenletből kifejezve $a = \frac{1}{3}$ (azaz az intervallum $[49,67,\ 50,33]$) és $n = 57$ (2 pont). Összesen 6 pont.