

8. gyakorlat

Gyakorlatvezetők: Tóth Ágnes, Móra Péter
Ludvig Ádám, Szabolcs Barnabás

2007. november 5., 10., 13.

1. Képletek

1. Definíció. A természetes számok a 0-ból és a pozitív számokból áll:

$$\mathbb{N} \stackrel{\text{def}}{:=} \{0, \underbrace{1, 2, 3, 4, \dots}_{\text{pozitív számok}}\}$$

1. Tétel (Wilson). Egy p szám pontosan akkor prím, ha

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}. \quad (1) \boxed{1}$$

Bizonyítás. Ha p nem prím, akkor (1) nyilvánvalóan nem teljesül. A másik oldal házi feladat. $\square$

2. Tétel (De Morgan).

$$\mathcal{A} \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A} \setminus \mathcal{C})$$

Minden komplex szám felírható $z = a + bi$ alakban, amely számnak a konjugáltja:

$$\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$$

Az alábbi képletben, aminek a száma (2), a limesz az e^2 számhoz tart:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = e^2. \quad (2) \boxed{e}$$

A deriválás definíció szerint:

$$f'(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (3) \boxed{2}$$

Nézzünk rá egy példát:

$$(a^2)' = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} x + a = 2a,$$

ahol az első egyenlőségénél a 3. egyenletet alkalmaztuk. Újabb példa a deriválásra:

$$(\tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Pár gyakorlattal ezelőtt megnéztük, hogy mennyi

$$(3 + \sqrt{5})^{7171}$$

tizedesvessző utáni 32. jegye. Feladatmegoldó szemináriumon megbeszélték, hogy

$$\begin{aligned} (3 + \sqrt{5})^{7171} + (3 - \sqrt{5})^{7171} &= \\ \sum_{k=0}^{7171} \binom{7171}{k} \left(\sqrt{5}^k 3^{7171-k} + (-\sqrt{5})^k 3^{7171-k} \right) &= \\ \sum_{k=0}^{7171} \binom{7171}{k} 3^{7171-k} \left(\sqrt{5}^k + (-\sqrt{5})^k \right) &\in \mathbb{N} \end{aligned}$$

teljesül, és mivel $|3 - 5\sqrt{5}| < 1$ ezért a kérdéses összeg elég közel lesz egy egész számhoz.

Az előző órán már volt integrál:

$$\int_0^\pi \sin(x) \, dx = 2,$$

ám a *limits* opcióval elérhetjük, hogy a határok az integrál jel felé, illetve alá kerüljenek:

$$\int_0^\pi \sin(x) \, dx = 2.$$

Vegyük az alábbi két vektort:

$$\mathbf{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

A skaláris szorzatuk: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 32$.

Egy 2×2 -es A mátrix determinánsa általános esetben:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma.$$

Egy 2×2 -es mátrix inverze pedig:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$$

Végül egy tartalmazási lánc:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Alapvető analízis példa a következő függvény:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{ha } x \text{ irracionális} \\ 1 & \text{ha } x \text{ racionális.} \end{cases}$$