Matematika B4
CHT feladatok

2005. november 9.

Feladatok:

1. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 12000 kockadobás során előforduló hatosok száma 1900 és 2150 közé esik?

2. Határozzuk meg azt a k egész számot, amelyre igaz, hogy annak a valószínűsége, hogy 1000 érmedobás során a fejek száma 490 és k közé esik, kb. 0.5!

   Megoldás: A fejdobás valószínűsége $1/2$. Keressük azt a k számot, amelyre $P(490 <$ fej dobások száma $< k) \approx 0.5$. Normális eloszlással fogunk közelíteni. Vegyük észre, hogy a fejdobások számát felírhatjuk $\sum_{i=1}^{1000} X_i$ alakban, ahol X_i legyen 1, ha az i. dobás fej volt, különben 0 (így pont a fejdobásoknál veszünk egyet, ezek összege pedig az összes fejdobások száma). Mit tudunk X_i-ről? $X_1, X_2, X_3, \cdots X_{1000}$ független valószínűségi változók, és eloszlásuk azonos: $P(X_i = 1) = p$ és $P(X_i = 0) = q$, ahol esetünkben $p = q = 1/2$. X_i szórása: $\sigma(X_i) = \sqrt{pq} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$. Mennyi $\sum_{i=1}^{1000} X_i$ szórása? Független valószínűségi változók esetén a szórásnégyzet adódik össze, így a szórás $\sqrt{n}$-szeresére változik, azaz $\sigma(\sum_{i=1}^{1000} X_i) = \sqrt{n}\sqrt{pq} = \sqrt{1000\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 5\sqrt{10}$.

   $\sum_{i=1}^{1000} X_i$ 500 várható értékű $5\sqrt{10}$ szórású valószínűségi változó

   $(\sum_{i=1}^{1000} X_i) - 500$ 0 várható értékű $5\sqrt{10}$ szórású valószínűségi változó

   $\frac{(\sum_{i=1}^{1000} X_i)-500}{5\sqrt{10}}$ 0 várható értékű 1 szórású valószínűségi változó, ezt közelíthetjük standard normálissal.

   Oldjuk meg a feladatot!

$$P(490 < \sum_{i=1}^{1000} X_i < k) = P(490 - 500 < (\sum_{i=1}^{1000} X_i) - 500 < k - 500) =$$

$$P(\frac{490-500}{5\sqrt{10}} < \frac{(\sum_{i=1}^{1000} X_i) - 500}{5\sqrt{10}} < \frac{k-500}{5\sqrt{10}}) = \Phi(\frac{k-500}{5\sqrt{10}}) - \Phi(\frac{490-500}{5\sqrt{10}}) \approx$$

$$\Phi(\frac{k-500}{5\sqrt{10}}) - \Phi(-0.632) \approx \Phi(\frac{k-500}{5\sqrt{10}}) - 0.263 \approx 0.5$$

   A táblázatot fordítva használva kikereshetjük, hogy mely értékhez tartozik $0.5 + 0.263 = 0.763$ körüli érték. Ez a 0.716 körül fog előfordulni. Így:

$$\frac{k-500}{5\sqrt{10}} \approx 0.716 \quad \Rightarrow \quad k \approx 511$$

3. Hányszor kell egy érmével dobnunk ahhoz, hogy 0.99-nál nagyobb valószínűséggel a fej eredmények száma a dobások számának 49%-a és 51%-a közé essen?
   Megoldás: Feltehetően sokszor, ezért normális eloszlással közelítünk. Mint gyakorlaton láttuk, az érmedobás

szórása: $\sqrt{pq}$, ahol mind a fej, mind az írás valószínűsége $1/2$, $1/2$, azaz $\sqrt{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$. Tegyük fel, hogy k-szor kell dobnunk. A fejdobásokra gondolhatunk úgy, mint ha vennénk egy k tagú összeget, amelynek minden tagja vagy 0, vagy 1. Az 1-eseknek feleltessük meg a fejeket, a 0-ásoknak az írásokat. Ekkor $P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = 1/2$ minden i-re (ekkor az összeg pont a fejek száma). $\sum_{t=1}^{k} X_i$ szórása, mivel X_i-k függetlenek, ezért az összeg szórása $\sqrt{n}$-szerese X_i szórásának.

$\sum_{t=1}^{k} X_i$	$k/2$ várható értékű,	$\sqrt{k\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \sqrt{k}/2$ szórású
$(\sum_{t=1}^{k} X_i) - k/2$	0 várható értékű,	$\sqrt{k}/2$ szórású
$\frac{(\sum_{t=1}^{k} X_i)-k/2}{\sqrt{k}/2}$	0 várható értékű,	1 szórású

Osszuk le az összeget k-val, hogy az átlagot kapjuk. Alakítsuk át a képletet úgy, hogy 0 várható értékű, 1 szórású valószínűségű változót kapjunk, és utána becsüljünk normálissal:

$$P(0.49 < \frac{\sum_{t=1}^{k} X_i}{k} < 0.51) = P(0.49 - 0.5 < \frac{(\sum_{t=1}^{k} X_i) - k/2}{k} < 0.51 - 0.5)$$

$$P(-2 * 0.01 < \frac{(\sum_{t=1}^{k} X_i) - k/2}{k/2} < 2 * 0.01) = P(-0.02 < \frac{(\sum_{t=1}^{k} X_i) - k/2}{k/2} < 0.02) =$$

$$P(-0.02\sqrt{k} < \frac{(\sum_{t=1}^{k} X_i) - k/2}{\sqrt{k}/2} < 0.02\sqrt{k}) \approx \Phi(0.02\sqrt{k}) - \Phi(-0.02\sqrt{k}) = 0.99$$

Az utolsó egyenlőség a feladat szövege miatt van, az utolsó előttinél használunk normális eloszlással való közelítést, a többi elemi átalakítás. Vegyük észre, hogy:

$$\Phi(0.02\sqrt{k}) - \Phi(-0.02\sqrt{k}) = 2 * \Phi(0.02\sqrt{k}) - 1 = 0.99 \Rightarrow \Phi(0.02\sqrt{k}) = 0.995$$

Táblázatból kiolvasható, hogy a Φ függvény körül-belül 2.576-nél lesz 0.995. Innen: $0.02\sqrt{k} = 2.576$, ahonnan kifejezhető k, azaz a feladatban leírt pontosság eléréséhez dobjunk legalább 16590-szer.

4. Dömötör rulettezik a kaszinóban. Minden egyes körben 10 petákot tesz ‘piros’-ra. 100 játék után 300 peták a vesztesége. Jogos-e a gyanúja, hogy svindliz a croupier? (A rulett-körön összesen 37 mező van 0-tól 36-ig számozva. Ezek közül egy (a 0 jelű) zöld, a fennmaradó 36-ból pedig 18 piros és 18 fekete.)
   Megjegyzés: Azt válaszoljuk meg, hogy mennyi arra a valószínűség, hogy legalább 300 peták a vesztesége. Ha ezen valószínűség is kicsi, akkor abból intuitíven következik, hogy csal a croupier?