

Matematika B4

IV. gyakorlat

rövid megoldási útmutató

2005. március 10.

Az alábbi dokumentum a gyakorlaton elhangzott pár feladat megoldását tartalmazza, mivel a gyakorlaton elég kevesen tudtak megjelenni.

1. Bevezető kérdések

5. Annak a valószínűsége, hogy egy évben egyetlen repülőgép sem zuhan le 10%. Változatlan forgalmi viszonyokat feltételezve, mire tippel, hány repülőgép fog lezuhanni a következő évben.

Sok repülőgépjárat indul egy évben, és mindegyik járatnál ott van egy kis esély, hogy az adott járat lezuhan. Ez egy nagy n -hez és kis p -hez tartozó binomiális eloszlás, aminél sem n -et, sem p -t nem tudjuk. Ezt Poisson eloszlással közelíthetők, és ebben a példában mást nem is tudunk használni. (Íratlan szabály, hogy ahol látszólag kevés adat van, az Poisson lesz.)

$$X = \{\text{Egy évben lezuható repcsik száma}\}$$

$$P(X = 0) = 0.1 \text{ a feladat szövege szerint, és a Poisson eloszlás képlete alapján: } P(X = 0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda}$$

Ez a két érték megegyezik, innen következik, hogy $\lambda = \log_{10} \approx 2,3$. Ha λ egész, akkor a legvalószínűbb érték (szemléletesen a legmagasabb pácika) λ és $\lambda - 1$, ha λ tört, akkor ez az érték $\lfloor \lambda \rfloor$. Vagyis az esetünkben a válasz: $\lfloor 2,3 \rfloor = 2$. Két repülő lezuhanása a legvalószínűbb 1 év alatt.

2. Poisson eloszlás

Ha a X egy valós valószínűségi változó az $x_k = k$ ($k=0,1,2,\dots$) értékeket veheti fel és

$$P(X = k) = p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

ahol $\lambda > 0$ egy tetszőleges valós szám, akkor X eloszlását λ paraméterű Poisson-eloszlásnak nevezzük.

Feladatok:

5. Feltéve, hogy a balkezesek aránya átlagosan 1%, becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 200 véletlenszerűen kiválasztott ember között legalább négy balkezes van.

Ez a feladatot kiszámolható binomiális eloszlással is, de mivel a 200 már "nagy", a 0.01 pedig kicsi, ezért a nagy binomiális kifejezések számolása helyett számolhatunk Poissonnal, így nem fogunk pontos értéket kapni, ám a most kiszámolt hiba esetünkben 1 század alatt lesz.

Ha n -edrendű p paraméterű binomiálislist közelítünk Poissonnal, akkor λ -t np -nek kell választani. Esetünkben:

$$X = \{\text{200 ember közül a balkezesek száma}\}$$

$$\begin{aligned}
P(X \geq 4) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) \\
&= 1 - \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} \approx 0.1429
\end{aligned}$$

6. Sok év statisztikája áll rendelkezésünkre arra nézve, hogy naponta hány lakástűz volt Budapesten. A napi négyes gyakoriság ugyanolyan valószínűséggel fordul elő, mint az ötös gyakoriság. Becsülje meg, hogy a napok körülbelül hány százalékában fordul elő a kettes gyakoriság.

Az előzőekhez hasonlóan itt is meg lehet indokolni, hogy miért közelíthetünk Poisson eloszlással. (Sok lakás van, mindegyik nap mindegyik lakásban egy kis valószínűséggel üt ki tűz.)

$$X = \{\text{lakástűzök száma naponta}\}$$

$$P(X = 4) = P(X = 5) \Rightarrow \frac{\lambda^4}{4!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda^5}{5!}e^{-\lambda}$$

Egyszerű átrendezés után kapjuk, hogy $\lambda = 5$. A kérdéses érték:

$$P(X = 2) = \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} = \frac{25}{2}e^{-5} \approx 0.08422$$

7. Átlagosan hány szem mazsolának kell lennie egy sütiben ahhoz, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott sütiben 99%-os valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?

A sütiből sokat készítenek, és mindig egy jó nagy masszába dobják be a mazsolákat. Itt is használhatunk Poisson eloszlást. Egy λ paraméterű Poisson eloszlás várható értéke (erről később még lesz szó): λ . Ez azt jelenti, hogy ha a paraméter λ , akkor sok kísérlet átlaga λ -hoz fog tartani, vagyis átlagosan λ mazsola lesz egy sütiben. Azaz ha kiszámoltuk a megfelelő λ értéket, akkor az lesz a megoldás.

$$X = \{\text{egy kiválasztott sütiben lévő mazsolák száma}\}$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} \geq 0.99 \Rightarrow \lambda \geq \log 100 \approx 4,6$$

A fenti átalakításokat nem akarom részletezni. Csak át kell rendezni, és mindkét oldalt be kell szorozni 100-zal és e^λ -val. Tehát legalább 4,6 db mazsolának kell egy sütire jutnia.

8. Egy 400 oldalas könyvben összesen 200 sajtóhiba van (véletlenszerűen elszórva). Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 13. oldalon több, mint egy sajtóhiba van? És annak, hogy az első 6 oldalon nincs egy sem?

Poissonnal közelítünk. Nincs jelentősége, hogy a 13. oldalról van szó. Átlagosan fél sajtóhiba van egy lapon, vagyis $\lambda = 1/2$.

$$P(\text{A 13. oldalon lévő sajtóhibák száma} > 1) =$$

$$1 - P(\text{A 13. oldalon lévő sajtóhibák száma} = 0) - P(\text{A 13. oldalon lévő sajtóhibák száma} = 1) =$$

$$1 - \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} \approx 0,090204$$

6 oldalra $6 \frac{1}{2} = 3$ átlagosan hibát "várunk", ezért ebben az esetben $\lambda_2 = 3$.

$$\frac{\lambda_2^0}{0!}e^{-\lambda_2} \approx 0,05$$

3. Várható érték

Ha X eloszlása: $P(X = x_i) = p_i$, akkor X várható értéke:

$$\sum_i x_i p_i, \text{ feltéve ha } \sum_i |x_i| p_i < \infty$$

$t(X)$ várható értéke:

$$\sum_i t(x_i) p_i, \text{ feltéve ha } \sum_i |t(x_i)| p_i < \infty$$

Feladatok:

9. A diszkrét X eloszlás tagjai: $p(x) = \frac{x^2}{30}$ ($x=1,2,3,4$). Mennyi az eloszlás várható értéke?

A továbbiakban várható érték jelölésére m -et vagy $E(X)$ -et fogok használni. Behelyettesítve a képletbe:

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1^2}{30} + 2 \cdot \frac{2^2}{30} + 3 \cdot \frac{3^2}{30} + 4 \cdot \frac{4^2}{30} = \frac{10}{3}$$

10. Egy sorsjátékon 1 darab 1 000 000Ft-os, 10 db 50 000Ft-os, és 100 db 5 000Ft-os nyeremény van. A játékhoz 40 000db sorsjegyet adnak ki. Mennyi legyen a jegy ára, hogy egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke a jegy árának a felével egyezzen meg?

Számoljuk ki először a várható értéket, és a feladat szövege szerint ezt kell kettővel beszoroznunk. Arra a valószínűség, hogy 1 000 000 Ft-ot nyerünk $\frac{1}{40000}$, mivel a 40 000 db közül pontosan egy nyer. Arra az esély, hogy 50 000 Ft-ot nyerünk $\frac{10}{40000}$, mert a 40 000 db jegy közül pontosan 10-zel nyerhetünk ennyit, stb. A nyerhető értéket kell összeszoroznunk a hozzájuk tartozó valószínűséggel, azaz a képlet:

$$m = \frac{1}{40000} \cdot 1000000 + \frac{10}{40000} \cdot 50000 + \frac{100}{40000} \cdot 5000 = 50$$

A képletből hiányzik a 0 Ft-hoz tartozó tag, de az úgyis nulla lesz. Tehát egy jegy 100 Ft-ba kerüljön.

11. Albert és Béla a következőt játsszák. Mindketten feldobnak egy dobókockát, majd Albert annyi Ft-t kap Bélától amennyi a két kockán lévő pontok különbségének a négyzete. Béla meg annyit, amennyi a két kockán lévő pontok összege. Melyiküknek kedvez a játék hosszú távon?

(Egy lehetséges) megoldás vázlata: Egy 6x6-os táblán írjuk fel az összes esetet. Ezt tegyük meg mindkét esetben, úgy is, hogy Albert mennyi pénzt ad Bélának, és egy másik táblán, hogy Béla mennyi pénzt ad Albertnek. A felírt események mindegyike $\frac{1}{36}$ valószínűséggel fordul elő, ezért mindegyik értéket $\frac{1}{36}$ -dal megszorozva és összeadva megkapjuk, hogy Béla "átlagosan" (sok játék után a Béla által kifizetett pénz ennyi körül stabilizálódna) $\frac{35}{6}$ Ft-ot ad Aladárnak, míg "átlagosan" 7 Ft-ot kap. Így Béla jár jobban.

14. Egy kockával addig dobunk, míg 6-ost nem dobunk. Mennyi lesz az addigi dobásszám várható értéke? És ha két kockával dobunk addig, amíg valamelyiken 6-ost nem dobunk?

- a) Feltéve hogy az utolsó dobást is beleszámítjuk?

Mindkét esetben optimista geometriai eloszlásról van szó. Az órán levezetett képlet szerint a p paraméterű geometriai eloszlás várható értéke $\frac{1}{p}$. Az első esetben a siker valószínűsége egy dobásnál $\frac{1}{6}$, ennyi lesz a paraméter, tehát a várható érték 6 lesz, a második esetben a paraméter $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}$, tehát a várható érték $\frac{36}{11} \approx 3,27$ lesz.

- b) Feltéve hogy az utolsó dobást nem számítjuk bele?

Vegyük észre, hogy a feladat majdnem ugyanaz. A különbség abból áll, hogy ha például harmadikra jön ki a hatos, akkor az első kérdés szerint 3-at számolunk, a második esetében csak kettőt. Az első kérdés átfogalmazva: "Hányadikra jön ki a hatos?", míg a második kérdés: "Hány kudarcot kell megélnem a hatos dobás előtt?". Nyilván a második esetben mindig eggyel kevesebbet kapunk. Ez utóbbi a pesszimista geometriai eloszlás. A várható értéknél egy szummát számolunk, ahol minden érték eggyel kisebb lett. Mivel ezeket az értékeket adjuk össze megfelelő súlyozással, ezért az összeg is eggyel kisebb lesz. Azaz a várható érték: $6 - 1 = 5$ és $\frac{36}{11} - 1 \approx 2,27$.

16. Egy dobozban 2 piros és 2 fehér golyó van. Visszatevés nélkül húzunk az első pirosig, és jelöljük X -szel a húzások számát. Számoljuk ki: X , X^2 , 2^X , $\frac{1}{2^X}$ várható értékét!

Jelöljük X -szel a szükséges húzások számát, azaz $P(X = k) = P(k\text{-adikra húzzuk az első pirosat})$.

$$P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{6}$$

$$P(X = 3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

A képlet alapján a kérdéses értékek:

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$$

$$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{2}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{20}{6}$$

$$E(2^X) = 2^1 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{2}{6} + 2^3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{22}{6}$$

$$E\left(\frac{1}{2^X}\right) = \frac{1}{2^1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{17}{4}$$