

10. gyakorlat

Matematika A4

Gyakorlatvezetők: Vetier András, Móra Péter

2007. november 19.

1. Konvolúció

Ha X és Y *diszkrét* valószínűségi változók, akkor $Z = X + Y$ eloszlását könnyedén ki tudjuk számolni.

$$P(X + Y = l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X = k \cap Y = l - k)$$

Ha függetlenek is, akkor

$$P(X + Y = l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X = k)P(Y = l - k)$$

Például ha X, Y két szabályos dobókockával dobott értéket jelöl, akkor a képlet szerint:

$$P(\text{dobások összege} = 8) = P(X = 2)P(Y = 6) + P(X = 3)P(Y = 5) + \\ P(X = 4)P(Y = 4) + P(X = 5)P(Y = 3) + P(X = 6)P(Y = 2)$$

Ugyanilyen logikával számoltunk a félév elején.

Folytonos esetben is hasonló képletet kapunk. Ha X és Y függetlenek, továbbá X sűrűségfüggvénye $f(x)$, Y sűrűségfüggvénye $g(y)$, és $Z = X + Y$ sűrűségfüggvényét $h(z)$ -vel jelölve:

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z - x)dx$$

Feladatok:

1. Én és az öcsém kockával külön-külön dobunk az első 6-osig. Megszámoljuk, hogy összesen hányszor dobtunk. Adjuk meg ennek a számnak az eloszlását!
2. 20-an vagyunk egy osztályban. Mindenki dob az első 6-osig. Adjuk meg az összes dobás számának eloszlását.
3. Én kockával dobok az első 6-osig, az öcsém érmével dob az első fejjig. Megszámoljuk, hogy összesen hányszor dobtunk. Adjuk meg ennek a számnak az eloszlását!
4. Dél előtt átlagosan 3, 5-szer lépnek a lábamra a villamoson, délután csak 2, 5-szer. Mindkét esetben használhatunk Poisson eloszlást. Megszámolom, hogy egy nap hányszor léptek a lábamra. Adjuk meg ennek a valószínűségi változó eloszlását!
5. Minden diák 0.9 százalékos valószínűséggel megy át a vizsgán (a tudásától függetlenül). Két vizsgahely van: a K. AudMAX-ban 150-en vizsgáztak, még a Ch. MAX-ban 200-an. Mindkét teremben külön-külön megszámláljuk a sikeres vizsgák számát. Ez mindkét esetben binomiális eloszlású valószínűségi változó lesz. A nap végén megszámláljuk, hogy összesen hányan mentek át. Adjuk meg az összes sikeres vizsga számának eloszlását!

6. A számológéppel generálok két véletlen számot $[0, 1]$ -en, és összeadom őket. Írjuk fel az összeg eloszlásának sűrűségfüggvényét!
7. Számoljuk ki egy $[0, 2]$ -n és egy $[0, 3]$ -an egyenletes eloszlású valószínűségi változók összegének sűrűségfüggvényét.
8. Számoljuk ki egy λ_1 és egy λ_2 paraméterű exponenciális eloszlás konvolúcióját! (Ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, akkor ezt nevezzük 2-od rendű, λ paraméterű eloszlásnak.)
9. X és Y egymástól független valószínűségi változók, melyek egyenletes eloszlásúak az $[1, 5]$ intervallumon. Vezessük le $X - Y$ sűrűségfüggvényének a képletét!
10. Számoljuk ki $X - Y$ sűrűségfüggvényét, ha
 - a) X és Y egymástól független 2 paraméterű exponenciális eloszlás.
 - b) X λ paraméterű, Y μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

2. Gamma eloszlás

n db λ paraméterű független exponenciális eloszlás összegének eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i x^i}{i!} e^{-\lambda x} \quad \text{ha } x > 0$$

sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \quad \text{ha } x > 0$$

Feladatok:

11. Éjszaka bárányok helyett az ablakom alatt elhaladó kocsikat számolom. Átlagosan 3 perc telik el két autó elhaladása között. Mi a valószínűsége, hogy 6 perc alatt 3 kocsi hangját is hallom?
12. Egy világítótornyban kell megoldanunk a folyamatos (éjjel-nappali) világítást. A reflektorban az égők, amiket használunk exponenciális eloszlásúak 3 nap várható értékkel. Legközelebb új égőket csak 7 nap múlva kapunk. Mi a valószínűsége, hogy addig tudunk folyamatosan világítani, ha még 4 működőképes égőnk van?