

**Valószínűesszámitás 1. II. éves matematikus-hallgatóknak, illetve
Valószínűesszámitás (B4) II. éves mérnök-fizikus hallgatóknak
2007/2008. őszi félév, Szász Domokos**

**11. feladatsor
A normális eloszlás (egy- és többdimenziós)**

Memo:

Az egy dimenziós normális eloszlás, $N(m, \sigma)$, sűrűségfüggvénye

$$\varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

A paraméterek jelentése: $m \in \mathbb{R}$ a várható érték, $\sigma > 0$ a szórásnégyzet. (Ellenőrizték!) A standard választás: $m = 0, \sigma = 1$.

$$\varphi_{m,\sigma}(x) = \sigma^{-1} \varphi(\sigma^{-1}(x-m)),$$

ahol $\varphi(x) := \varphi_{0,1}(x)$. A (kumulált) eloszlásfüggvény:

$$\Phi_{m,\sigma}(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_{m,\sigma}(y) dy = \Phi((x-m)/\sigma),$$

ahol $\Phi := \Phi_{0,1}$ a standard normális eloszlásfüggvény. A standard normális sűrűségfüggvény és eloszlásfüggvény számszerű értékei a mellékelt táblázatból olvashatóak ki.

Az n dimenziós normális eloszlás: legyen $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n)^T \in \mathbb{R}^n$ n -dimenziós valós vektor és $\mathbf{C} = (c_{i,j})_{i,j=1}^n$ $n \times n$ méretű négyzetes, valós, szimmetrikus, pozitív definit mátrix. Az n dimenziós nem elfajult normális eloszlás sűrűségfüggvénye

$$\varphi_{\mathbf{m},\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathbf{C}}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{x}-\mathbf{m})}{2}\right).$$

A paraméterek jelentése: \mathbf{m} a várható érték vektor, \mathbf{C} a kovariancia mátrix. (Ellenőrizték!) Standard paraméter választás: $\mathbf{m} = \mathbf{0}, \mathbf{C} = \mathbf{I}$

$$\varphi_{\mathbf{m},\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = (\det \mathbf{C})^{-1/2} \varphi(\mathbf{C}^{-1/2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})),$$

ahol $\varphi := \varphi_{\mathbf{0},\mathbf{I}}$ a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye.

Alapigazságok:

- (1) Együttesen normális eloszlású valószínűségi változók akkor és csak akkor függetlenek, ha korrelálatlanok.
- (2) Több valószínűségi változó akkor és csak akkor együttesen normális eloszlású, ha tetszőleges lineáris kombinációi normális eloszlásúak. A lineáris kombinációk (együttes) eloszlásának paramétereit (várható érték, szórásnégyzet, kovariancia) nyilvánvaló módon számoljuk.
- (3) Együttesen normális eloszlású valószínűségi változók feltételes eloszlása, tetszőleges lineáris kombinációkkal megadott feltételek mellett, szintén normális. De ezt órán nem bizonyítottuk ...

11.1 Legyen $X \sim N(0,1)$ (azaz: standard normális) eloszlású valószínűségi változó. Az alábbi valószínűség-párok közül melyik a nagyobb?

(a) $p_1 = \mathbf{P}(|X| \leq 0.7), p_2 = \mathbf{P}(|X| \geq 0.7)$.

(b) $q_1 = \mathbf{P}(-0.5 \leq X \leq -0.1), q_2 = \mathbf{P}(1 \leq X \leq 2)$.

•11.2 Tudva, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2/2) dx = \sqrt{2\pi}$, számoljuk ki a következő integrált

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2 + bx + c) dx$$

ahol a valós és pozitív, b és c pedig tetszőleges valós (vagy komplex) konstansok.

11.3 Számoljuk ki a normális eloszlás alább definiált "abszolút momentumait":

$$A_k := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) |y|^k dy, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Útmutatás: Páros $k = 2l$ -re számoljuk ki és használjuk a köv. kifejezést:

$$\frac{d^l}{d\lambda^l} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda y^2/2} dy \Big|_{\lambda=1}.$$

Páratlan $k = 2l + 1$ -re hajtsuk végre a $z = y^2$ változócsereét az A_k -t definiáló integrálban.

11.4 Ellenőrizzük a következő két hatványsorfejtés érvényességét és mutassuk ki, hogy konvergencia sugaruk végtelen:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)! 2^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1}; \\ \Phi(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x - \frac{1}{2 \cdot 1!} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4 \cdot 2!} \frac{x^5}{5} - \frac{1}{8 \cdot 3!} \frac{x^7}{7} + \dots \right). \end{aligned}$$

•11.5 Legyen X nulla várható értékű és σ szórású, normális eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $x > 0$ esetén fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x^2/2\sigma^2)} \left(\frac{\sigma}{x} - \frac{\sigma^3}{x^3} \right) < \mathbf{P}(X > x) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x^2/2\sigma^2)} \frac{\sigma}{x}.$$

Útmutatás: Differenciáljuk az egyenlőtlenség-lánc mindhárom tagját és hasonlítsuk össze a deriváltakat.

•11.6 Emberek egy bizonyos csoportjának az átlagos testsúlya m kg, a testsúlyok szórása pedig 3 kg. $m = 60$ ill. $m = 10$ esetén határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember testsúlya az átlagtól nem tér el 5 kg-nál többel, ha

- (a) a testsúly normális eloszlású;
- (b) a testsúly log-normális eloszlású;

11.7 Legyen X valószínűségi változó $N(0, 1)$ (azaz standard normális) eloszlású. Határozzuk meg a következő várható értékeket és szórásnégyzeteket:

- (a) $\mathbf{E}(X \cos(X))$, $\mathbf{E}(X/(1 + X^2))$, $\mathbf{E}(\sin(X))$;
- (b) $\mathbf{E}(\cos(X))$, $\mathbf{D}^2(\cos(X))$, $\mathbf{D}^2(\sin(X))$.

11.8 Az X és Y valószínűségi változók függetlenek és azonos $N(0, 1)$ eloszlásúak. Definiáljuk az $U := X + Y$ és $V := X - Y$ valószínűségi változókat. Függetlenek lesznek-e egymástól U és V ?

11.9 Legyen X $N(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változó és $Y := \text{sign}(1 - |X|) \cdot X$.

- (a) Határozzuk meg az Y valószínűségi változó eloszlását.
- (b) $Z := X + Y$ eloszlása normális-e?

11.10 Legyenek X és Y független és azonos $N(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg a

$$Z := e^{(X^2+Y^2)/2} (1 + X^2 + Y^2)^{-3/2}$$

valószínűségi változó várható értékét és szórását.

11.11 Legyenek X és Y független $N(0, 1)$. illetve $N(0, 2)$ eloszlású valószínűségi változók és M egy véletlenszerűen kiválasztott pont az \mathbb{R}^2 síkon, melynek koordinátái $(X; Y)$. Határozzuk meg a következő események valószínűségét:

- (a) $M \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 2\}$,
- (b) $M \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, |y| \leq 2\}$,
- (c) $M \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4\}$,
- (d) $M \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 0, |x| \leq 1, y \geq -2\}$,
- (e) $M \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y^2/4) \leq 1\}$,
- (f) $M \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y^2/4) \leq c^2\}$.

- 11.12 Egy folyó feletti híd téglalap alakú, melynek koordinátái Descartes féle koordináta rendszerben eleget tesznek a következő feltételeknek: $|x| \leq 10, |y| \leq 100$ (valamilyen hossz-egységekben). Tűzérési támadás esetén a lövedék beesésének $(X; Y)$ pontja (ugyanabban a koordináta rendszerben), kétdimenziós normális eloszlású, független komponensekkel és $\sigma_X = 10, \sigma_Y = 40$ szórással. Az $(\mathbf{E}(X); \mathbf{E}(Y))$ koordinátájú pontot "célpont"-nak nevezzük. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a lövedék eltalálja a hidat, ha a célpont:

- (a) $(0, 0)$, (b) $(10, 0)$, (c) $(5, 20)$.

- 11.13 Legyen $(X; Y)$ kétdimenziós normális eloszlású $(0; 0)$ várható értékkel és $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Határozzuk meg annak az eseménynek a valószínűségét, hogy az (X, Y) koordinátájú véletlen pont a $(0; 3), (4; 0), (1.8; 5.4), (5.8; 2.4)$ csúcsú téglalapba esik.

- 11.14 Legyen $(X; Y)$ kétdimenziós normális eloszlású $(0; 0)$ várható értékkel és $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Határozzuk meg annak az eseménynek a valószínűségét, hogy az (X, Y) koordinátájú véletlen pont az ABC háromszögbe essék, a következő esetekben:

- (a) $A = (0; 0), B = (1; 1), C = (2; 0)$.
- (b) $A = (0; 2), B = (2; 0), C = (2; 2)$.
- (c) $A = (2; 0), B = (1; 1), C = (1; 0)$.

Útmutatás: Használjunk szimmetriákat!

- 11.15 Legyen $(X; Y)$ kétdimenziós normális eloszlású $(0; 0)$ várható értékkel és $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Határozzuk meg az $(X; Y)$ Descartes-koordinátájú pont $(R; \Theta)$ polárkoordinátáinak együttes eloszlását.

- 11.16 Legyen $(X; Y)$ kétdimenziós normális eloszlású $(0; 0)$ várható értékkel és $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az $(X; Y)$ koordinátájú véletlen pont beleesik az
 - (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3\}$ körgyűrűbe;
 - (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq \min(|x|, |y|) \leq \max(|x|, |y|) \leq 3\}$ tartományba;
 - (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq |x| + |y| \leq 3\}$ tartományba.

- 11.17 Az $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ valószínűségi vektorváltozó eloszlása nemelfajult két dimenziós normális eloszlás $\vec{0} = (0, 0)$ várható értékkel és $\left(\sigma_{i,j}\right)_{i,j=1}^2$ kovariancia mátrixszal $(\sigma_{i,j} \in \mathbb{R}, \sigma_{1,2} = \sigma_{2,1}, \sigma_{1,1} > 0, \sigma_{2,2} > 0, \sigma_{1,1}\sigma_{2,2} - \sigma_{1,2}\sigma_{2,1} > 0)$. Számítsuk ki a következő valószínűségeket:

- (a) $p_{00} = \mathbf{P}(X \geq 0, Y \geq 0)$;
- (b) $p_{01} = \mathbf{P}(X \geq 0, Y \leq 0)$;
- (c) $p_{10} = \mathbf{P}(X \leq 0, Y \geq 0)$;
- (d) $p_{11} = \mathbf{P}(X \leq 0, Y \leq 0)$.

- 11.18 Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ független és azonos $N(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg k -nak azt a minimális értékét, amelyre $\mathbf{P}(\max(|X_1|, |X_2|, \dots, |X_k|) \geq 2) \geq 1/2$.

- 11.19 Egy ember vonattal és távolsági autóbuszszal utazik a munkahelyére. *Menetrend szerint* a vonat 7:30-kor érkezik, a busz pedig 7:37-kor indul. Az átszállás két percet vesz igénybe. Ám a vonat valódi érkezési ideje *normális eloszlású* valószínűségi változó melynek várható értéke 7:30-kor van és szórása 4 perc. Az autóbusz valódi indulási ideje a vonat érkezésétől független, szintén normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke 7:37-kor van, szórása pedig 3 perc. Mennyi annak a valószínűsége, hogy emberünk a hét öt munkanapja közül legfeljebb egy alkalommal kesse le a buszcsatlakozást?