Valószínűségszámítás 1. II. éves matematikus-hallgatóknak, illetve
Valószínűségszámítás (B4) II. éves mérnök-fizikus hallgatóknak
2007/2008. őszi félév, Szász Domokos

10. feladatsor
Várható érték, szórásnégyzet, kovariancia stb. II.

10.1 Hamis érmével dobunk, melynél a *fej* valószínűsége p, az *írásé* pedig $q = 1 - p$. Jelöljük X-szel és Y-nal az első, ill. a második tiszta (fej vagy írás) sorozat hosszát. (Pl. ha dobássorozatunk $FFFIIF\ldots$, akkor $X = 3$, $Y = 2$; ha pedig dobássorozatunk $IFFI\ldots$, akkor $X = 1$, $Y = 2\ldots$) Határozzuk meg a következő mennyiségeket: $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{E}(Y)$, $\mathbf{E}(X^2)$, $\mathbf{E}(Y^2)$, $\mathbf{D}^2(X)$, $\mathbf{D}^2(Y)$, $\mathbf{Cov}(XY)$.

• 10.2 Egy társaságban 60 véletlenszerűen kiválasztott ember van. Határozzuk meg azon napok számának várható értéket amelyeken a társaság 0,1,2,3, ill. 4 tagjának van születésnapja.

10.3 Egy $l < 1$ cm hosszú tűt dobunk véletlenszerűen egy 1 cm vonaltávolságú négyzethálóra. Határozzuk meg a ledobott tű által átmetszett háló-vonalak számának várható értékét. (Használjuk fel Buffon tű-problémájának megoldását.)

10.4 Aladár, Béla, Cili és Dömötör kockáznak: mindannyian egyszer dobnak két kockával és az a személy, aki a legnagyobb összeget dobja, nyer 120 petákot. Ha többen dobják ugyanazt a legnagyobb összeget, egyenlően osztoznak a 120 petákon. Ha Aladár dobott számainak összege 9, mennyi a nyereményének (feltételes) várható értéke?

10.5 Véletlenszerűen elhelyezünk egy huszárt egy üres sakktáblára. Mennyi a lehetséges lépései számának a várható értéke?

10.6 Számoljuk ki a $BIN(p, n)$, $POI(\lambda)$, $GEO(p)$, $E(a, b)$, $EXP(\lambda)$, $N(m, \sigma)$ eloszlások várható éretékét és szórásnégyzetét.

10.7 n-szer dobunk egy kockával. Jelölje X, ill. Y a dobott egyesek illetve hatosok számát. Számoljuk ki $\mathbf{Cov}(X, Y)$-t.

10.8 Legyenek X és Y olyan valószínűségi változók, amelyek csak két értéket vehetnek fel. ($\mathrm{Ran}(X) = \{x_1, x_2\}$, $\mathrm{Ran}(Y) = \{y_1, y_2\}$.) Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$ (azaz: X és Y korrelálatlanok), akkor X és Y függetlenek is. (A korrelálatlanság általában nem implikálja a függetlenséget!)

• 10.9 Egy hibátlan érmével dobunk háromszor. Jelölje X ill. Y a dobott *fej*ek illetve *írás*ok számát. Számoljuk ki a $Z := XY$ valószínűségi változó várható értékét és szórását.

10.10 Egy hibátlan kockával dobunk tízszer. Jelölje X azt a számot, ahányszor páros dobást páratlan követ. Mennyi X várható értéke és szórása?

10.11 Egy urnában N golyó van, 1-től N-ig számozva. Visszatevéssel húzunk golyókat az urnából mindaddig, amíg mindegyik golyót legalább egyszer ki nem húzzuk. Jelölje X a szükséges húzások számát. Határozzuk meg $\mathbf{E}(X)$-et és $\mathbf{D}^2(X)$-et.

10.12 Tizenkét ember beszáll egy liftbe a földszinten. Egymástól függetlenül választanak cél-állomást az épület tíz emelete közül, egyenletesen eloszlással. Határozzuk meg a lift megállásai számának várható értékét és szórásnégyzetét.

• 10.13 (a) Hatszor dobunk egy kockával. Határozzuk meg a *különböző* eredmények számának várható értékét és szórásnégyzetét.

(b) Addig dobunk egy kockával. amíg négy *különböző* eredményt nem látunk. Határozzuk meg a szükséges dobások számának várható értékét és szórásnégyzetét.

(c) Addig dobunk egy kockával. amíg két egymásutáni dobásnak ugyanaz az eredménye. Határozzuk meg a szükséges dobások számának várható értékét és szórásnégyzetét.

• 10.14 Egy urnában a darab fehér és b darab piros golyó van. Visszatevés nélkül addig húzunk, amíg fehér golyót nem találunk. Mennyi az addig kihúzott piros golyók számának várható értéke és szórásnégyzete?