Valószínűségszámítás 1. II. éves matematikus-hallgatóknak, illetve
Valószínűségszámítás (B4) II. éves mérnök-fizikus hallgatóknak
2007/2008. őszi félév, Szász Domokos

7. feladatsor
Folytonos eloszlásfüggvények, sűrűségfüggvények. Geometriai valószínűségek.

Memo:
Eloszlásfüggvény: $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, $F(x) := \mathbf{P}(X < x)$.
Tulajdonságai:

(1) monoton, nem-csökkenő;

(2) balról folytonos;

(3) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Sűrűségfüggvény: Ha az $F(\cdot)$ eloszlásfüggvény $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$ alakban állítható elő, akkor $F(\cdot)$ *abszolút folytonos* és $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ az $F(\cdot)$ eloszlás *sűrűségfüggvénye*.
A sűrűségfüggvény tulajdonságai:

(1) mérhető;

(2) nem-negatív;

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy = 1$.

Ebben az esetben F (majdnem mindenhol) differenciálható és (majdnem mindenhol)
$F'(x) = f(x)$.

7.1 Eloszlásfüggvények-e a következő függvények?

- (a) $F(x) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2\pi}\mathrm{arctg}(x)$
- (b) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \le 0 \\ [x]/2, & \text{ha} \quad 0 < x \le 2 \\ 1, & \text{ha} \quad 2 < x \end{cases}$
- (c) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \le 0 \\ x/(1+x), & \text{ha} \quad 0 < x \end{cases}$

(d) $F(x) = \exp(-e^{-x})$

(e) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \le 0 \\ 1-(1-\exp(-x))/x, & \text{ha} \quad 0 < x \end{cases}$

7.2 Milyen α és c értékekre lesz eloszlásfüggvény a következő függvény?

$$F(x) = \exp(-c\,e^{-\alpha x}).$$

7.3 Bizonyítsuk be, hogy ha $F(x)$ eloszlásfüggvény, akkor bármely rögzített $h > 0$-ra az alább értelmesett $G_1(x)$ és $G_2(x)$ is eloszlásfüggvény.

$$G_1(x) := \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} F(y)dy, \qquad G_2(x) := \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} F(y)dy.$$

Adjunk valószínűségszámítási értelmet a fenti formuláknak.

7.4 Legyen $F(x)$ *folyotnos* eloszlásfüggvény és $F(0) = 0$. Mutassuk meg, hogy

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \le 1 \\ F(x) - F(x^{-1}), & \text{ha} \quad 1 < x \end{cases}$$

is eloszlásfüggvény. Adjunk valószínűségszámítási értelmet a fenti formulának.

- 7.5 Lássuk, hogy ha egy folytonos eloszlásfüggvényű nemnegatív valószínűségi változó rendelkezik az örökifjú tulajdonsággal, akkor csak exponenciális eloszlású lehet.

7.6 Egy l hosszúságú ropit találomra választott pontban ketté törünk. Mi az így keletkezett darabok közül a rövidebbiknek az eloszlásfüggvénye?

7.7 (a) A $[0,1]$ intervallumban jelöljünk ki találomra (azaz: egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással) három pontot. Határozzuk meg a középső pont abszcisszájának az eloszlásfüggvényét.

(b) A $[0,1]$ intervallumban jelöljünk ki találomra (azaz: egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással) n pontot. Határozzuk meg a k-adik pont abszcisszájának az eloszlásfüggvényét.

• 7.8 Válasszunk az egységnégyzetben egy pontot véletlenszerűen (egyenletes eloszlással). Jelölje ξ e pontnak a távolságát a négyzet legközelebbi oldalától. Határozuk meg a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét.

7.9 Mondjuk meg, hogy az alábbi függvények közül melyek valószínűségi sűrűségfüggvények és melyek nem:

(a) $f(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{ha} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

• (b) $f(x) = \begin{cases} \sin x + 1/(2\pi) & \text{ha} \quad 0 \le x \le 2\pi \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

• (c) $f(x) = \begin{cases} x^{-2} & \text{ha} \quad 1 \le x \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

• (d) $f(x) = \begin{cases} x/(1+x) & \text{ha} \quad 0 \le x \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < \infty$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty$

(g) $f(x) = \begin{cases} 4x^3e^{-x^4} & \text{ha} \quad 0 \le x \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

• (h) $f(x) = \begin{cases} -\log x & \text{ha} \quad 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

• (i) $f(x) = \begin{cases} 2e^{-x}(1-e^{-x}) & \text{ha} \quad 0 \le x \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

(j) $f(x) = \begin{cases} -e^{-x}/x + (1-e^{-x})/x^2 & \text{ha } 0 < x \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

• (k) $f(x) = \dfrac{1}{\pi\cosh(x)}, \quad -\infty < x < \infty$

(l) $f(x) = \dfrac{\lambda^n}{2(n-1)!}|x|^{n-1}e^{-\lambda|x|}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \lambda > 0.$

7.10 Az x tengely $[0,1]$ intervallumában véletlenszerűen kiválasztunk egy pontot. Jelölje ξ e pont távolságát a sík $(0;1)$ koordinátájú pontjától. Határozzuk meg a ξ valószínűségi változó eloszlásának sűrűségfüggvényét.

7.11 Válasszunk az egységnégyzetben véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) egy pontot. Jelölje ξ e pontnak a négyzet legközelebbi csúcsától való távolságát. Határozzuk meg a ξ valószínűségi változó eloszlásának sűrűségfüggvényét.

• 7.12 Egy téglalap oldalainak hossza legyen 1 ill a. A két szemközti 1 hosszú oldalon egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kijelölünk egy-egy véletlen pontot. Jelölje X e pontok távolságát. Mi X sűrűségfüggvénye?

7.13 Az A, B és C pontokat válasszuk véletlenszerűen, egyenletes eloszlással és egymástól függetlenül egy kör kerületén. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ABC háronszög hegyesszögű?

7.14 Egy ropit két, egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kiválasztott pontban eltörünk.

(a) Mennyi a valószínűsége annak hogy az így nyert három darabból háromszöget alkothatunk?

(b) Mennyi a valószínűsége annak hogy az így nyert három darabból hegyesszögű háromszöget alkothatunk? (Ez nehezebb!!!)

(c) Mennyi a valószínűsége annak hogy az így nyert három darab mindegyike rövidebb mint az $a \in [l/3, l]$ rögzített szám? (l a ropi hossza)

7.15 Három egyenlő hosszú ropiból véletlenszerűen letörünk egy-egy darabot. A törési pontokat egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással választjuk ki.

(a) Mennyi a valószínűsége annak hogy az így nyert három darabból háromszöget alkothatunk?

(b) Mennyi a valószínűsége annak hogy az így nyert három darabból hegyesszögű háromszöget alkothatunk?

7.16 Három űrhajó leszáll a Marsra, egymástól függetlenül, egyenletes eloszlással választott pontokra. Két űrhajó akkor tud *közvetlen* rádiókapcsolatba lépni egymással, ha a Mars középpontjából induló helyzetvektoraik hegyesszöget zárnak be egymással. Bizonyítsuk be, hogy annak a valószínűsége, hogy a bármely két űrhajó kommunikálni tud egymással (szükség esetén a harmadik űrhajó közvetítésével) $\frac{2+\pi}{4\pi}$.

7.17 (a) Egy kör kerületén válasszunk n pontot egymástól függetlenül és egyenletes eloszlás szerint. A kerületen elhelyezkedő pontok egy konvex sokszöget katároznak meg. Mennyi annak a valószínűsége, hogy e sokszög lefedje a kör középpontját?

(b) Egy kör belsejében válasszunk n pontot egymástól függetlenül és egyenletes eloszlás szerint. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a pontok konvex burka lefedje a kör középpontját?