Valószínűségszámítás 1. II. éves matematikus-hallgatóknak, illetve
Valószínűségszámítás (B4) II. éves mérnök-fizikus hallgatóknak
2007/2008. őszi félév, Szász Domokos

5. feladatsor
diszkrét valószínűségi változók

5.1 Bizonyítsuk be, hogy a Poisson eloszlásnál a $k = \lfloor\lambda\rfloor$-hez tartozó valószínűség a maximális. Ha λ nem egész szám, akkor csak ez az egy tag maximális, ha azonban λ egész, akkor $p(\lambda, \lambda) = p(\lambda - 1, \lambda)$.

• 5.2 Egy szobának négy ablaka van, ebből három zárva van és egy nyitva. A szobából három légy próbál kirepülni. Minden másodpercben, egymástól függetlenül nekirepülnek valamelyik véletlenszerűen kiválasztott ablaknak. Ha az ablak nyitva van, kirepülnek, ha pedig zárva, akkor egy másodperc múlva újból próbálkoznak. Jelölje T azt a véletlen időpontot, amikor 2 alá csökken a szobában levő legyek száma.

(a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy n másodperc elteltével még legalább két légy van a szobában, azaz $\mathbf{P}(n < T)$?

(b) Határozza meg ennek segítségével T eloszlását.

5.3 Legyenek M, N, n nemnegatív egészek, úgy, hogy $M \le N$ és $n \le N$. A hipergeometrikus eloszlást a köv. kifejezés értelmezi:

$$h_{N,M,n}(k) := \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Legyen n nemnegatív egész és $p \in [0, 1]$. A binomoális eloszlást a köv. kifejezés értelmezi:

$$b_{p,n}(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Bizonyítsuk be, hogy ha rögzített n és k mellett $N \to \infty$, $M \to \infty$ úgy, hogy $\frac{M}{N} \to p$, akkor $h_{N,M,n}(k) \to b_{p,n}(k)$.

5.4 Feltéve, hogy a balkezesek aránya átlagosan 1%, becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 200 véletlenszerűen kiválasztott ember között legalább négy balkezes van.

• 5.5 Egymás után tízszer dobunk egy szabályos érmével. Legyen X az egymás utáni egyforma kimenetelekből álló sorozatok száma, vagyis pl. csupa fej esetén $X = 1$, a FFIIIIFIFF sorozatnál pedig $X = 5$. Határozzuk meg X eloszlását.

• 5.6 Egy 400 oldalas könyvben összesen 200 sajtóhuba van (véletlenszerűen elszórva). Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 13. oldalon több mint egy sajtóhuba van?

5.7 Igazoljuk a következő formulát, és adjunk neki valószínűségszámítási értelmezést:

$$\sum_{k=0}^{5} \frac{8!}{k! \cdot 3! \cdot (5-k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right)^{5-k} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^5.$$

5.8 Átlagosan hány mazsolának kell egy sütiben lennie, ha azt kívánjuk elérni, hogy egy véletlenszerűen választott sütiben legalább 0.99 valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?

5.9 Tegyük fel, hogy a világűr egy bizonyos tartományában két fajta (A és B típusú) csillag van. Az A típusú csillagok számának eloszlása λ paraméterű $p(k; \lambda)$, míg a B típusúaké μ paraméterű $p(k; \mu)$ Poisson eloszlás. Az A-, ill. B típusú csillagok száma egymástól független. Bizonyítsuk be, hogy a világűr e tartományában lévő csillagok száma $p(k; \lambda + \mu)$ Poisson eloszlású. Értelmezzük és fogalmazzuk meg az állítást absztrakt terminusokban.

5.10 Egy utca autóforgalmát úgy modellezzük, hogy

1. az időskálát fix és oszthatatlan egy másodpercnyi időegységekre osztjuk,
2. feltesszük, hogy $p \in (0, 1)$ annak a valószínűsége, hogy az egyes időintervallumokban elhalad az utcán egy autó,
3. továbbá azt is feltesszük, hogy az egyes időegységekben történő események egymástól függetlenek.

Egy gyalogos akkor tud átmenni az utca túloldalára, ha legalább három másodpercig forgalommentes az utca. (Feltesszük, hogy az utca belátható: a gyalogos el tudja dönteni, hogy a köv. három másodpercben lesz-e forgalom.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az utcán átmenni óhajtó gyalogosnak 0, 1, 2, 3, 4 másodpercig kell várnia áthaladás előtt? (Ne próbáljanak *általános* képletet felírni — ez egyelőre nehéz.)

5.11 Egy rossz hírű légitársaságnál minden évben 1/2 valószínűséggel előfordul (legalább egy) gépeltérítés.

(a) Mi a valószínűsége, hogy jövőre legalább három gépeltérítés lesz?

(b) Mi a valószínűsége, hogy jövőre legalább három gépeltérítés lesz, feltéve, hogy legalább egyszer elő fog fordulni?

5.12 Egy pók által rakott peték száma $p(k;\lambda)$ Poisson eloszlású. Az egyes peték egymástól függetlenül p valószínűséggel fejlődnek ki (ill. $q = 1 - p$ valószínűséggel halnak el). Bizonyítsuk be, hogy a pók kifejlődött gyermekeinek száma $\mu = p\lambda$ paraméterű Poisson eloszlású. Értelmezzük és fogalmazzuk meg absztrakt terminusokban az állítást.

• 5.13 Egy fán levő almák száma POI (λ) Poisson-eloszlású. Az egyes almák egymástól függetlenül p valószínűséggel kukacosak.

(a) Bizonyítsuk be, hogy a kukacos almák száma $\mu = p\lambda$ paraméterű Poisson-eloszlású.

(b) Jelölje X a kukacos és Y az ép almák számát. Mutassa meg, hogy X és Y független valószínűségi változók.

• 5.14 Móricka, ha túrázni megy, minden lépésnél – az előzményektől függetlenül – valamekkora (kicsi) valószínűséggel hasraesik és megüti a térdét, illetve valamekkora (kicsi) valószínűséggel hanyatt esik és megüti a könyökét. Egy 10 kilométeres túrán átlagosan 3-szor szokta megütni a térdét és 2-szer a könyökét. Legfeljebb milyen hosszú túrára engedheti el az anyukája, ha azt akarja, hogy 2/3 valószínűséggel térd- és könyöksérülés nélkül járja meg?

5.15 (a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy 1000 egymásutáni póker-leosztásban legalább négyszer van fullunk?

(b) Számoljuk ki a fenti valószínűséget numerikusan a Poisson approximáció segítségével.

5.16 1000 megkülönböztethető golyót helyezünk véletlenszerűen 10000 dobozba. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első 25 dobozba legalább 4 golyó essék?

5.17 Egy erdő átlagos sűrűsége: 16 fa 100 m^2-enként. A fák törzse teljesen szabályos, 20 cm átmérőjű kör alapú henger. Egy puskagolyót lövünk ki célzás nélkül, az erdő szélétől 120 m-re, kifelé az erdőből. Mennyi annak a valószínűsége, hogy eltalálunk egy fatörzset?
(Tekintsünk el attól az apró zavaró tényezőtől, hogy a fák alapköreinek középpontjai min. 20 cm távolságban vannak.)

5.18 Legyenek $p \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$ és $\lambda = pn \in (0,\infty)$ rögzítve. Továbbá:
$a_k := b(k;p,n)/p(k;\lambda)$. Bizonyítsuk be, hogy amint $k = 0, 1, 2, \dots$ növekszik

(a) a_k először növekszik, majd csökken és a maximális értékét $\lfloor \lambda + 1 \rfloor$-nál éri el.

(b) a_k először kisebb, mint 1, majd 1 felé nő, majd újból 1 alá csökken.

5.19 (Fakultatív: csak kedvtelésből csinálják ...)
Bizonyítsuk be, hogy a binomiális eloszlás Poisson approximációjában a konvergencia k-ban egyenletes, azaz

$$\lim \left(\sup_k |b(k;p,n) - p(k;\lambda)| \right) = 0,$$

amint $p \to 0$, $n \to \infty$ úgy, hogy $pn \to \lambda \in (0,\infty)$.

5.20 Bizonyítsuk be a következő azonosságokat:

$$\sum_{k=0}^{n} kb(k;p,n) = np, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 b(k;p,n) = n^2p^2 + np(1-p);$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} kp(k;\lambda) = \lambda, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p(k;\lambda) = \lambda^2 + \lambda.$$

5.21 Bizonyítsuk be és értelmezzük a valószínűségszámítás terminusaiban a következő azonosságokat:

$$\sum_{l=0}^{k} b(l;p,n_1)b(k-l;p,n_2) = b(k;p,n_1+n_2),$$
$$\sum_{l=0}^{k} p(l;\lambda_1)p(k-l;\lambda_2) = p(k;p,\lambda_1+\lambda_2).$$

5.A Oldjuk meg most már végre a 2.11-es (elcserélt kapalok) feladat „Elszántabbaknak” szóló részét! Vagyis: keressük annak a valószínűségét, hogy pontosan k ember megy haza a saját kalapjával a fején, abban a határesetben, amikor a kalapjukat összekeverő emberek n száma végtelenhez tart.