Valószínűségszámítás 1. II. éves matematikus-hallgatóknak, illetve
Valószínűségszámítás (B4) II. éves mérnök-fizikus hallgatóknak
2007/2008. őszi félév, Szász Domokos
3. feladatsor
Feltételes valószínűség, Bayes tétel stb.

3.1 Két urnában piros és kék golyók vannak. Az első urnában 5 piros és 4 kék, a másodikban 7 piros és 3 kék golyó.

(a) Kihúzunk az első urnából találomra egy golyót és áttesszük a második urnába. Ezután a második urnából húzunk találomra egyet és áttesszük az első urnába. Végül harmadszor újból az első urnából húzunk egy golyót. Mi a valószínűsége annak, hogy a harmadik alkalommal piros golyót húzunk?

(b) Egyszerre húzunk egy-egy golyót a két urnából és kicseréljük őket. Ezután húzunk még egy golyót az első urnából. Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó húzáskor piros golyót találunk?

3.2 n dobozba elhelyezünk N golyót úgy, hogy mind az n^N elhelyezés egyenlően valószínű. Feltéve, hogy egy adott dobozba esik golyó, mennyi a valószínűsége annak, hogy K golyó esik bele?

• 3.3 Egy kockával addig dobunk, amíg először kapunk hatost. Feltéve, hogy a szükséges dobások száma páros, mennyi a valószínűsége annak, hogy kétszer kellett dobnunk?

3.4 Három kockát feldobunk. Feltéve, hogy a dobott számok között nincs két egyforma, mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább az egyiken hatos van?

3.5 Tegyük fel, hogy egy ketyere meghibásodásának a valószínűsége a $(t, t+h)$ időintervallumban azon feltevés mellett, hogy már t ideig hibátlanul működött $a(t)h + o(h)$-val egyenlő, ahol $\lim_{h\to 0} h^{-1}o(h) = 0$. Határozzuk meg annak a $p(t)$ valószínűségét, hogy a ketyere legalább t ideig hibátlanul működik.

3.6 Két játékos, Aladár és Béla a következő játékszabályok alapján játszik: Aladár feldob egy kockát, azután két érmét annyiszor dob fel, ahányat a kockával dobott. Ha e dobások során legalább egyszer két fejet dobott, akkor Béla fizet Aladárnak egy petákot, ellenkező esetben Aladár fizet Bélának egy petákot. Melyiküknek előnyös ez a játék?

3.7 Az α kockának 4 piros és 2 fehér, míg a β kockának 2 piros és 4 fehér lapja van. Feldobunk egy érmét. Ha fej a dobás eredménye, akkor a továbbiakban az α kockát használjuk, ha pedig írás akkor a β-t. Az így kiválasztott kockával egymásután n-szer dobunk.

(a) Mi annak a valószínűsége, hogy a k-adik dobásnál az eredmény piros? $(k = 1, 2, \ldots, n)$

(b) Feltéve, hogy mind az első $k-1$ kockadobás eredménye piros, mi annak a valószínűsége, hogy a k-adik dobás eredménye is piros lesz? $(k = 1, 2, \ldots, n)$

• 3.8 Jancsi és Juliska randevút beszélnek meg egy meghatározott időpontra, két utca kereszteződésénél. Elfelejtik viszont megbeszélni, hogy a négy sarok közül melyiknél várnak egymásra. Az útkereszteződés nagyon forgalmas, nem lehet átlátni egyik sarokról a többire. Mindkettő pontosan megérkezik valamelyik sarokra és ha a másik nincs ott, 2.5 percet vár a másikra, ezután átmegy a szomszédos sarkok valamelyikére, 1/2-1/2 valószínűséggel. Ez további 0.5 percet vesz igénybe. Ha a másik nincs ott, újból 2.5 percet vár, majd 1/2-1/2 valószínűséggel kiválaszt egy szomszédos sarkot, ahová átbattyog ...stb. Feltesszük, hogy eredetileg mindketten 1/4-1/4 valószínűséggel érkeznek bármelyik sarokra, egymástól függetlenül, és szintén egymástól és múltbeli helycseréiktől függetlenül váltogatják várakozási helyüket mindaddig, amíg nem találkoznak. Találkozásnak számít az is, ha helyzetüket éppen váltva egymással szembe mennek az úttesten.

(a) (a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a megbeszélt időponttól számított 3 percen belül találkoznak?

(b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a megbeszélt időponttól számított 6 percen belül találkoznak?

(c) Jelölje p_n annak a valószínűségét, hogy az első $3n$ percen belül találkoznak. Határozzuk meg p_n értékét.

(d) Jelölje r_n annak a valószínűségét, hogy a találkozás a $3n$-edik percben következik be. Határozzuk meg az r_n valószínűséget.

(e) Bizonyítsuk be, hogy 1 annak a valószínűsége, hogy véges időn belül találkoznak.

• 3.9 Móricka és Pistike pingpongoznak. Minden játszmát a többitől függetlenül Móricka p, Pistike pedig q valószínűséggel nyer meg, ahol $p > 0$, $q > 0$ és $p + q = 1$. A játék akkor ér véget, ha valaki két egymás utáni játszmát megnyer.

(a) Mi a valószínűsége, hogy Móricka nyeri az utolsó játszmát?

(b) Mi a valószínűsége, hogy ugyanaz nyeri az első játszmát, mint az utolsót?

(c) Ha tudjuk, hogy az utolsó játszmát Móricka nyerte, mennyi a valószínűsége, hogy az elsőt is?

3.10 Szindbádnak egyszer megadatott, hogy N háremhölgy közül kiválassza a legszebbet, a következő játékszabály szerint: az N háremhölgy egyenként vonult el előtte, azok valamelyikét kellett kiválasztania. A már elvonultak nem hívhatók vissza és azokról, akik még nem vonultak el semmit sem tudott. Feltételezzük, hogy a háremhölgyeknek jól definiált szépségfokozatuk van: van egy legszebb, egy második legszebb, egy harmadik legszebb, ... és végül egy legkevésbé szép közöttük. Továbbá azt is feltételezzük, hogy véletlen sorrendben vonulnak el Szindbád előtt: mind az $N!$ lehetséges sorrendjük egyformán valószínű.

Szindbád a következő stratégiát választotta: k hölgyet hagyott elvonulni, majd ezután kiválasztotta azt, amelyik szebb volt az összes előtte már elvonultnál. Mi a valószínűsége annak, hogy ezzel a módszerrel valóban a legszebb háremhölgyet választotta? Határozzuk meg azt a k-t, amely mellett a fenti stratégia optimális $N \gg 1$ határesetben.

3.11 Vándorlásai közben Odüsszeusz, egyszer egy hármas útelágazáshoz ért. Tudta, hogy az egyik út Athénbe, a másik Mükénébe a harmadik pedig Spártába vezet, de nem tudta, hogy melyik hova. Azt is tudta, hogy az athéniek átlagosan csak minden harmadik alkalommal mondanak igazat, a mükénéiek minden második alkalommal hazudnak, a spártaiak viszont becsületesek, sohasem hazudnak. Kockadobással döntötte el, hogy melyik utat válassza, méghozzá egyenlő esélyt adva mindháromnak. Ezután ment, ment, mendegélt, míg egy városba nem ért. Ott az első szembejövő embertől megkérdezte, mennyi kétszer kettő és azt a választ kapta, hogy négy. Mi a valószínűsége annak, hogy Odüsszeusz végülis Athénbe érkezett?

•3.12 Magyarországon minden tízezredik lakos HIV fertőzött. A fertőzöttség szűrésére AIDS tesztet használnak, ami sajnos az esetek 1%-ában téved, vagyis az egészséges emberek tesztjeinek 1%-a pozitív, illetve a fertőzött emberek tesztjeinek 1%-a negatív. Jancsi Bácsi tesztje sajnos pozitív. Mi a valószínűsége, hogy Jancsi Bácsi valóban fertőzött?

3.13 A ketyere gyárban az A, B és C gépsorokon állí tják elő a ketyeréket. Az A gépsoron a ketyerék 25%-át gyártják, a B gépsoron a ketyerék 35%-át, míg a C gépsoron a 40%-át. Az A gépsoron előállított ketyerék 5%-a, a B gépsoron előállítottak 4%-a, a C gépsoron előállítottak 2%-a hibás. A gyárban gyártott ketyerék közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet, amelyről kiderül, hogy hibás. Mi annak a valószínűsége, hogy ezt a ketyerét az A, B, ill. a C gépsoron gyártották?

3.14 Száz utas várakozik arra, hogy beszállhassanak egy százfős repülőgépbe. A sor legelején álló utas elveszítette a beszállókártyáját, így egy egyenletesen választott helyre ül le a gépen. A többi utas egyenként száll fel, és ha egyikük azt látja, hogy a helyét elfoglalta már valaki más, akkor a még szabad ülések közül véletlenül választ egyet, és oda ül le. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a sor végén álló utas oda fog ülni, ahova a beszállókártyája szól?

3.15 Jelölje p_n annak a valószínűségét, hogy egy családban pontosan n gyerek van, $n = 0, 1, 2, \dots$ és legyen $p_n := \alpha\rho^n$, $n \geq 1$-re, és $p_0 = 1 - \alpha\rho(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots)$, ahol $\rho \in (0, 1)$ és $\alpha > 0$ úgy vannak megválasztva, hogy $\alpha\rho < 1 - \rho$. Tegyük fel, hogy ha egy családban n gyerek van, azok nemenkénti eloszlása egyenletes (a 2^n lehetőség között). Mutassuk meg, hogy minden $k \geq 1$-re, annak a valószínűsége, hogy egy családban pontosan k fiú van $2\alpha\rho^k/(2 - \rho)^{k+1}$

3.16 (A Négy Hazudós) Aladár, Béla, Cili és Dömötör hazudósak: átlagosan az esetek 2/3-ában hazudnak mind a négyen, egymástól függetlenül, véletlenszerűen.

Aladár azt állítja, hogy Béla tagadja, hogy Cili azt mondta, hogy Dömötör hazudott.

Mi a valószínűsége annak, hogy Dömötör igazat mondott?

(Feltételezzük, hogy Aladár tudja, hogy mit mindott Béla, Béla tudja, hogy mit mindott Cili, Cili tudja, hogy mit mindott Dömötör. Továbbá, hogy Cili azt is el tudja dönteni, hogy Dömötör hazudott-e vagy sem.)

3.17 Egy vadász 30 méter távolságban felfedez egy rókát és rálő. Ha a róka ezt túléli, akkor 10 m/s sebeséggel próbál menekülni. A vadász 3 másodpercenként ujratölt és lő a rókára, mindaddig, amíg meg nem öli, vagy (szerencsés esetben) a róka el nem tünik a látóhatáron. A vadász találati valószínűsége a távolság négyzetével fordítottan arányos, a következő képlet szerint $\mathbf{P}$(a vadász eltalálja az x méter távolságban levő rókát)$= 675x^{-2}$ ($x \geq 30$). Ha a rókát találat éri, elpusztul. Mi a valószínűsége annak, hogy a róka túléli ezt a kellemetlen kalandot?

•3.18 Pistike élete első valószínűségszámítás-vizsgáján 1/2 valószínűséggel megy át. Ha ezen megbukik, a következő vizsgára már kevesebbet tanul, ezen csak 1/3 a siker valószínűsége. Minél többször bukik meg, annál kevesebbet tanul, így $k - 1$ sikertelen vizsga után már csak $1/(k + 1)$ a valószínűsége, hogy a k-adik vizsgája sikeres. Ám Pistike kitartó, és a szabályzat szerint akárhányszor vizsgázhat. Mennyi a valószínűsége, hogy előbb-utóbb átmegy?

3.19 Adott egy (végtelen térfogatú) urnánk és végtelen sok $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ elemeivel számozott golyónk. Az urna eredetileg üres. Éjfél előtt egy perccel fogjuk az $1, 2, \dots, 10$ számú golyókat, behelyezzük őket az urnába, az urnát jól összerázzuk, majd véletlenszerűen kihúzunk az urnából egy golyót, amit elhajítunk. Éjfél előtt fél perccel fogjuk a $11, 12, \dots, 20$ számú golyókat, behelyezzük őket is az urnába, az urnát jól összerázzuk, majd véletlenszerűen kihúzunk az urnából egy golyót, amit elhajítunk. ...... Éjfél előtt 2^{-n} perccel fogjuk a $10n + 1, 10n + 2, \dots, 10(n + 1)$ számú golyókat, behelyezzük őket is az urnába, az urnát jól összerázzuk, majd véletlenszerűen kihúzunk az urnából egy golyót, amit elhajítunk. És ezt így folytatjuk éjfélig.

Bizonyítandó, hogy éjfélkor az urna 1 valószínűséggel üres lesz.