**Valószínűségszámítás 1. II. éves matematikus-hallgatóknak, illetve**
**Valószínűségszámítás (B4) II. éves mérnök-fizikus hallgatóknak**
**2007/2008. őszi félév, Szász Domokos**

**2. feladatsor**
**Kombinatorikus valószínűség, szita formula, stb.**

2.1 $n$ (megkülönböztethető) golyót helyezünk véletlen módon $n$ urnába. Mi a valószínűsége annak, hogy *pontosan* egy urna marad üresen?

2.2 Egy parkoló tizenkét egymásmelletti helyből áll. Egy ember azt vette észre, hogy nyolc autó parkol úgy, hogy az üresen maradó négy hely egymás mellett volt. Feltéve, hogy négy üres parkolóhely volt, meglepő-e ez az elrendezés? Utal-e valamilyen nem-véletlen eseményre? (Pl. arra, hogy egy nagyobb társaság egyszerre hagyta el a parkolót.)

2.3 Egy $n$ elemű populációból $r$ elemű mintát veszünk. Mi annak a valószínűsége, hogy a populáció előre kijelölt $N$ eleme közül egy sem legyen a mintában, feltéve hogy a mintát (a) visszatevés nélkül, (b) visszatevéssel vesszük? Számoljuk ki a numerikus értékeket a következő esetekre: (i) $n = 100$, $r = N = 3$; (ii) $n = 100$, $r = N = 10$.

2.4 Egy szekrényben $n$ pár cipő van. Véletlenszerűen kiválasztunk $2r$ cipőt ($2r \leq n$). Mi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott cipők között (a) nincsen teljes pár, (b) pontosan egy teljes pár van, (c) pontosan két teljes pár van?

2.5 Egy kulcskarikán $n$ kulcs van, amelyek közül csak egy illik a kinyitandó zárba. Találomra (véletlen sorrendben) próbáljuk ki a kulcsokat — ismétlés nélkül mindaddig, amíg a jó kulcsra rá nem lelünk. Kísérletünk 1,2, ... , $n$ próbálkozás után érhet véget. Mutassuk meg, hogy mind az $n$ eredménynek azonosan $1/n$ a valószínűsége.

2.6 (a) Egy embert tizenkétszer megbüntettek tilosban való parkolásért. Mind a tizenkét büntetést kedden vagy csütörtökön kapta. Feltéve, hogy a rendőrök véletlenszerűen ellenőriznek a hét bármely napján, számoljuk ki a fenti eset valószínűségét. Bölcs volt-e emberünk azon döntése, hogy ezentúl kedden és csütörtökön parkolóházba vitte autóját?
(b) Tizenkét hasonló büntetést kaptunk a hét különböző napjain, de egyiket sem vasárnap. Jogosult-e a feltevésünk, hogy a rendőrök vasárnaponként nem ellenőriznek?

• 2.7 Számoljuk ki a poker különböző értékelhető konfigurációinak valószínűségeit. Azaz: 52 kártyából ($\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit$ : $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, D, K, A$) véletlenszerűen kiválasztunk ötöt. Mi annak a valószínűsége, hogy egy párunk, két párunk, tercünk, sorunk, fullunk, kvartunk, royal flushünk van?

• 2.8 Bridgeben mi a valószínűsége annak, hogy Északnak és Délnek *együttesen* $k$ db. ásza van ($k = 0, 1, 2, 3, 4$)?
Hasonlítsuk össze a pontos értékeket a Stirling formula segítségével kapott közelítő értékekkel.

2.9 (a) Legyenek $a, b, c, d$ nemnegatív egész számok, amelyekre $a + b + c + d = 13$. Számoljuk ki annak az eseménynek a valószínűségét, hogy Észak, Kelet, Dél és Nyugat $a$, $b$, $c$, illetve $d$ darab pikket kap egy bridge-leosztásban.
(b) Az előbbi eredmény segítségével számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy valamelyik játékos $a$, egy másik $b$, egy harmadik $c$, végül a negyedik $d$ pikket kap, ha (1) $a = 5, b = 4, c = 3, d = 1$; (2) $a = b = 4, c = 3, d = 2$; (3) $a = b = c = 4, d = 1$.

• 2.10 A sakktáblán találomra helyezzünk el nyolc bástyát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egyik bástya sem ütheti a másikat?

2.11 (Elcserélt kalapok) Egy $n$ tagú férfitársaság vacsorázni ment egy étterembe. Kalapjaikat a ruhatárban hagyták. Vacsora és borozgatás után kalapjaikat teljesen véletlenszerűen vitték el a ruhatárból. Mi a valószínűsége annak, hogy a társaságnak legalább egy tagja a saját kalapját vitte haza? Számoljuk ki e valószínűség határértékét az $n \to \infty$ limeszben.
*Elszántabbaknak:* Számoljuk ki nagy $n$-re (azaz az $n \to \infty$ limeszben) annak az eseménynek a valószínűségét, hogy pontosan $k$ ember megy haza a saját kalapjával a fején.

2.12 (a) $k$ golyót helyezünk véletlenszerűen $n$ dobozba. Mi a valószínűsége annak, hogy egyik doboz sem marad üres?
(b) Az előbbi eredményt használva számoljuk ki a következő kifejezés értékét $k \leq n$-re:

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}j^k\binom{n}{j}.$$

2.13 $n = 20$ golyót helyezünk $r = 6$ dobozba véletlenszerűen (Bose-Einstein eloszlás szerint).
(a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy egyik doboz sem marad üres?
(b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy pontosan 2 doboz marad üres?
(c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy mondegyik dobozban legalább két golyó lesz?

• 2.14 Tízszer dobunk egy kockával. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az 1,2, ... ,6 eredmények mindegyike legalább egyszer előfordul?

2.15 Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy egy bridge-leosztásban Északnak semelyik értékből ne legyen kézben mind a négy kártyája (azaz: ne legyen négy 2-ese, sem négy 3-asa, ... , sem négy K-a, sem négy A-a).

2.16 Bizonyítsuk be az alábbi azonosságokat:

$$(1) \qquad n \geq 1 \text{ esetén } : \qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0,$$

$$(2) \qquad n \geq 0 \text{ esetén } : \qquad \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

$$(3) \qquad n \geq 2 \text{ esetén } : \qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k} = 0$$

$$(4) \qquad n \geq 0 \text{ esetén } : \qquad \sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$$

• 2.17 Bizonyítsuk be, hogy pozitív $n$-re és $k$-ra fennáll a következő azonosság:

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j} = 0.$$

Általánosabban:

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}t^j = \binom{n}{k}(1+t)^k.$$

2.18 Bizonyítsuk be, hogy bármely természetes $n$-re fennáll a következő azonosság:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

*Útmutatás:* Használjuk a hipergeometrikus eloszlást.