Valószínűségszámítás 1. II. éves matematikus-hallgatóknak, illetve
Valószínűségszámítás (B4) II. éves mérnök-fizikus hallgatóknak
2007/2008. őszi félév, Szász Domokos

1. feladatsor
Eseménytér, események algebrája, valószínűség

1.1 Legyenek A, B és C tetszőleges események. Fejezzük ki halmazelméleti műveletekkel a következő eseményeket:
(a) az A, B és C események közül pontosan k következik be $(k = 0, 1, 2)$;
(b) az A, B és C események közül legalább i bekövetkezik $(i = 1, 2)$;
(c) az A, B és C események közül legfeljebb j következik be $(j = 1, 2)$.

1.2 Ellenőrízzük az alábbi azonosságokat:
(a) $A \circ A = \emptyset$; (b) $A \circ \emptyset = A$; (c) $A \circ \Omega = \overline{A}$; (d) $A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$; (e) $(A \circ B) \cap B = B \setminus A$;
(f) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$; (g) $A \cap B \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$; (h) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
(i) $A \setminus [A \setminus (B \setminus C)] = A \cap B \cap \overline{C}$; (j) $A \cup B = A \circ B \circ (A \cap B)$;
(k) $A \circ C \cup [B \setminus (A \cup C)] = [(A \circ B) \setminus (A \cap C)] \cup [(B \circ C) \setminus (A \cap C)]$; (l) $A \circ C \subset (A \circ B) \cup (B \circ C)$;
(m) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$;
(n) $(A \cup B) \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
(o) $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C) = [A \setminus (B \cap C)] \cup [B \setminus (C \cap A)] \cup [C \setminus (A \cap B)]$;
(p) $(A \cup B \cup C \cup D) \setminus (A \cup B \cup C) = D \setminus (A \cup B \cup C)$;
(r) $A \cap (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup C) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \cup D) = A \cap B \cap C \cap D$; (s) $[(A \cap B) \setminus (A \cap C)] \setminus (B \cap C) = (A \cap B) \setminus C$;
(t) $(A \cap B) \cup C \setminus [(A \cap C) \cup B] = C \setminus (A \cup B)$;
(u) $[A \cap (B \cup C)] \cup [B \cap (C \cup A)] \cup [C \cap (A \cup B)] = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

1.3 Legyen Ω tetszőleges eseménytér és $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tetszőleges esemény algebra. Bizonyítsuk be, hogy
(a) $(\mathcal{A}, \circ)$ Abel-csoport;
(b) $(\mathcal{A}, \circ, \cap)$ gyűrű (melyben $\circ$ az összeadás és $\cap$ a szorzás). A gyűrű nulleleme $\emptyset$, egységeleme Ω.

1.4 (a) Három különböző érmét és két azonos (megkülönböztethetetlen) kockát dobunk fel egyszerre. Hány különböző kimenetele lehet a kísérletnek. Reprezentáljuk a kísérlet eseményterét.
(b) Három fekete és két fehér kockát dobunk fel egyszerre. (Az azonos színű kockák megkülönböztethetetlenek). Hány különböző kimenetele lehet a kísérletnek. Reprezentáljuk a kísérlet eseményterét.

• 1.5 Három kockát dobunk fel egyszerre. Az azonos színű kockák megkülönböztethetetlenek. Hány különböző kimenetele lehet a kísérletnek
(a) ha a kockák azonos színűek;
(b) ha két kocka fekete és a harmadik fehér;
(c) ha mindhárom kocka különböző színű?

1.6 Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tetszőleges események. Mit jelent az $A_1 \circ A_2 \circ \ldots \circ A_n$ esemény?
Megjegyzés: Az 1.3 feladat (d) pontjának következtében a $\circ$ művelet *asszociatív.*

• 1.7 Egy urnában van 6 fehér, 6 zöld és 2 piros golyó. Benyúlunk az urnába és találomra kiveszünk 2 golyót.
(a) Írjuk le az eseményteret.
(b) Hány megfigyelhető esemény lehetséges a szóbanforgó kísérletnél?
(c) Hány megfigyelhető esemény lehetséges, ha a két golyót egymás után húzzuk?

1.8 (a) Legyen A, B és C három tetszőleges esemény. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\mathbf{P}(A \circ C) \leq \mathbf{P}(A \circ B) + \mathbf{P}(B \circ C).$$

Ez azt jelenti, hogy ha $\Delta(A, B) := \mathbf{P}(A \circ B)$ 'távolságot' értelmezzük az események között, akkor $\Delta(\cdot, \cdot)$ kielégíti a háromszög egyenlőtlenséget.
(b) Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{P}(A \circ B) = 0$, akkor $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B)$.

1.9 Mutassuk meg, hogy bármely A, B és C eseményre fennáll:

$$|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap C)| \leq \mathbf{P}(B \circ C).$$

1.10 Mutassuk meg, hogy bármely A és B eseményre fennáll:

$$-\frac{1}{4} \le \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \le \frac{1}{4}.$$

1.11 Mutassuk meg, hogy bármely A és B eseményre fennáll a

$$\mathbf{P}^2(A \cap B) + \mathbf{P}^2(A \cap \overline{B}) + \mathbf{P}^2(\overline{A} \cap B) + \mathbf{P}^2(\overline{A} \cap \overline{B}) \ge \frac{1}{4}$$

egyenlőtlenség, és ebben az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 1/2$ és $\mathbf{P}(A \cap B) = 1/4$ (azaz az A és B események függetlenek).
(Használjuk a lineáris algebrából jól ismert Schwarz egyenlőtlenséget.)

1.12 (a) Legyen A és B két esemény. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{P}(A) \ge 0.8$ és $\mathbf{P}(B) \ge 0.5$, akkor $\mathbf{P}(A \cap B) \ge 0.3$.
(b) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A_1, A_2, \dots, A_n$ eseményekre fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \ge P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) - (n-1).$$

1.13 Két azonos erejű játékos, Ádám és Éva ping-pongoznak. Tekintsük a következő eseményeket:

$$A := \{\text{Ádám négy meccsből (pontosan) hármat megnyer}\}$$
$$B := \{\text{Éva nyolc meccsből (pontosan) ötöt megnyer}\}$$

(a) Számolás nélkül saccoljuk meg a két esemény valószínűségét. Melyik tünik valószínűbbnek?
(b) Ellenőrízzük intuiciónkat a valószínűségek kiszámolásával.

1.14 Három kockával dobva, mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összege 10-nél nagyobb?
Megjegyzés: Ez volt a nyerés feltétele a XVII. században divatos “passe dix” játékban.

• 1.15 Mi a valószínűbb: az-e, hogy egy kockával négyszer dobva, legalább egyszer hatost dobjunk, vagy hogy két kockával 24-szer dobva legalább egyszer mindkét kockával hatost dobjunk.
Megjegyzés: Ez De Méré lovag feladata, 1654-ben Blaise Pascaltól kérdezte. Valójában már Cardano (1501-1576) is foglalkozott a kérdéssel.
Próbáljanak olyan bizonyítást találni, amely zsebszámológép használata nélkül is eredményre vezet.

1.16 Mi a valószínűbb: 6 kockadobással legalább egyszer hatost dobni vagy 12 kockadobással legalább kétszer hatost dobni?
Megjegyzés: A kérdés Isaac Newton és Samuel Pepys levelezésében fordul elő. Pepys-t nem győzte meg Newton (korrekt) érvelése.

1.17 Egy érmét addig dobunk, amíg kétszer egymás után azonos oldalára nem esik. Minden lehetséges n dobást igénylő sorozat valószínűsége legyen 2^{-n}. (Miért?) Írjuk le a kísérlet eseményterét. Mi az alábbi események valószínűsége:

(1) $A := \{\text{a kísérlet hatnál kevesebb érmedobással véget ér}\}$
(2) $B := \{\text{a kísérlet páros számú érmedobás után ér véget.}\}$

• 1.18 Anna, Bori és Cili egyforma erejű ping-pong játékosok. A következő módon játszanak: Anna és Bori mérik először össze az erejüket. Ezután a vesztes kiáll és a várakozó Cili áll be a helyére, hogy összemérje tudását az előző nyertessel. ... Minden egyes meccs után a vesztes átadja a helyét a várakozónak. Folytatják ezt mindaddig, amíg valamelyikük kétszer egymasután nem nyer és a körmérkőzés győztesévé van kikiáltva. Írjuk le a körmérkőzés eseményterét. Az n páros csata után véget érő sorozatok valószínűsége legyen 2^{-n}. (Miért?) Mi a valószínűsége annak, hogy Anna, ill. Bori, ill. Cili nyeri a kőrmérkőzést?

• 1.19 (a) Számoljuk ki az ötös lottón 0, 1, 2, 3, 4 és 5 találat valószínűségét, három értékes jegy pontossággal.
(b) Számoljuk ki az hatos lottón 0, 1, 2, 3, 4, 5 és 6 találat valószínűségét, három értékes jegy pontossággal.