Elmélet

minta

1. Feladat (10 pont)**.** *Mondja ki a következő tételeket és definíciókat:*

- *Kezdetiérték-probléma megoldásának definíciója*
- *A lokális és a globális egyértelműség kapcsolata*
- *Nemlineáris autonóm differenciálegyenlet egyensúlyi pontjának stabilitása (tétel)*
- *Vonzó egyensúlyi pont definíciója*
- *Barbasin–Kraszovszkij-tétel*

2. Feladat (10 pont)**.** *Mondja ki és bizonyítsa be a Ljapunov stabilitási tételt.*

3. Feladat ($\pm$10 pont)**.** *Igazak-e az alábbi állítások? (A választ nem kell indokolni.)*

- *A folytonos jobb oldalú explicit elsőrendű differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémának van megoldása.*
- *A Laplace-transzformált értelmezési tartománya tartalmaz egy $\Re z > \sigma$ félsíkot (a komplex síkon).*
- *Ha a p egyensúlyi pont aszimptotikusan stabil, akkor létezik olyan környezete, amelyből nem mennek ki a megoldások.*
- *Ha egy f jobb oldalú explicit elsőrendű differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma megoldása folytonosan függ a kezdeti értéktől, akkor f folytonos és a második változójában Lipschitz-tulajdonságú.*
- *Két differenciálható függvény pontosan akkor lineárisan független, ha Wronski-determinánsuk nem nulla.*

Feladatok

minta

4. Feladat (6p)**.** *Az* $y' = y^2$, $y(0) = p$ *kezdetiérték-probléma megoldását szukcesszív approximációval keresve két lépés után a pontos megoldást kaptuk. Mi lehet a* p *paraméter értéke?*

5. Feladat (10+2 pont)**.** *Oldja meg az*

$$\dot{x} = -2x + 4y + pe^{2t},$$
$$\dot{y} = 3x - y - 3e^{2t}$$

differenciálegyenlet-rendszert az $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ *feltétel mellett. A* p *valós paraméter mely értékére nem lesz olyan megoldása az egyenletrendszernek, amely gyorsabban tart végtelenbe, mint* e^{2t} *?*

6. Feladat (12p)**.** *Írjunk fel olyan másodrendű (inhomogén) Euler-féle differenciálegyenletet, amelynek megoldása* $u(r) = (r+1)^2$.