Elmélet

2021. 01. 15.

1. Feladat (10 pont)**.** *Mondja ki a következő tételeket és definíciókat:*

- *Arzelá-Ascoli-tétel*
- *Cauchy – Peano-tétel*
- *Alaprendszer, alapmátrix*
- *Vonzó egyensúlyi pont definíciója*
- *Ljapunov instabilitási tétel*

2. Feladat (10 pont)**.** *Definiálja a lineáris differenciálegyenlethez tartozó kezdetiérték-problémát, majd bizonyítsa be, hogy (az egyértelműen létező) maximális megoldás a lehető legbővebb intervallumon van értelmezve. (A maximális megoldás létezésén és egyértelműségén kívül minden felhasznált állítást bizonyítson!)*

3. Feladat ($\pm$10 pont)**.** *Igazak-e az alábbi állítások? (A választ nem kell indokolni.)*

- *Ha $\varphi(t)$ (folytonos és) minden $\varepsilon>0$-ra ε-közelítő megoldás, akkor pontos megoldás is.*
- *Folytonos jobb oldalú explicit elsőrendű differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma maximális megoldása minden olyan korlátos és zárt intervallumon korlátos marad, ahol értelmezve van.*
- *Ha a p egyensúlyi pont egy környezetéből induló megoldások $t \to +\infty$ esetén p-hez tartanak, akkor p aszimptotikusan stabil.*
- *A lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldásai vektorteret alkotnak.*
- *Ha a p egyensúlyi helyzet egy U környezetében megadható olyan folytonosan differenciálható $V : U \to \mathbb{R}$ függvény, hogy minden $p \neq q \in U$-ra $V'(q)f(q) \leq 0$ és $V(p) \leq V(q)$, akkor a p egyensúlyi helyzet stabil.*

Feladatok

2021. 01. 15.

4. Feladat (14p)**.** *Oldja meg az* $xy'+y=-2x$ *differenciálegyenletet, ábrázolja a megoldásokat, és adjon meg egy olyan kezdeti értéket, hogy a megoldás egyértelmű legyen! Az* $y(1)=0$ *kezdeti feltételhez tartozó megoldást közelítse szukcesszív approximációval két lépésben, majd (Taylor-sor módszerrel vagy határozatlan együtthatók módszerével) számítsa ki a harmadfokú tagokig!*

5. Feladat (16p)**.** *A Routh – Hurwitz-kritérium, valamint a* $V(x,y,z)=\frac{1}{2}x^2+$ $+xy+\frac{3}{2}y^2-\frac{1}{2}z^2$ *függvény segítségével is vizsgáljuk meg az origó stabilitását:*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -5x+4y,\\ \dot{y} &= x-2y+z,\\ \dot{z} &= x+3y+z.\end{aligned}$$