Elmélet

2021.01.08.

1. Feladat (10 pont)**.** *Mondja ki a következő tételeket és definíciókat:*

- *Kezdetiérték-probléma maximális megoldása*
- *A maximális megoldás tulajdonságai*
- ε*-közelítő megoldás*
- *Stabil egyensúlyi pont definíciója*
- *Tétel a folytonos függésről*

2. Feladat (10 pont)**.** *Mondja ki és bizonyítsa be a Cauchy – Peano egzisztencia-tételt (a felhasznált részállítások közül egyet kell bizonyítani, a többit elég kimondani).*

3. Feladat ($\pm$10 pont)**.** *Igazak-e az alábbi állítások? (A választ nem kell indokolni.)*

- *Az explicit elsőrendű differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémának pontosan egy megoldása van.*
- *A Laplace-transzformált a teljes komplex síkon értelmezve van.*
- *Ha a* p *egyensúlyi pont egy környezetéből induló megoldások* $t \to +\infty$ *esetén* p*-hez tartanak, akkor* p *stabil.*
- *Ha* $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *nyílt,* $f : U \to \mathbb{R}$ *folytonos és a második változójában Lipschitz-tulajdonságú, akkor a megoldás folytonosan függ a kezdeti értéktől.*
- *Ha a* p *egyensúlyi helyzet egy* U *környezetében megadható olyan folytonosan differenciálható* $V : U \to \mathbb{R}$ *függvény, hogy minden* $p \neq q \in U$*-ra* $V'(q)f(q) < 0$ *és* $V(p) \leq V(q)$*, akkor a* p *egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabil.*

Feladatok

2021.01.08.

4. Feladat (16 pont). *Keresse meg az* $y'' - y' = 1$, $y'(0) = 0$, $y(0) = 1$ *kezdetiérték-probléma megoldását négyféleképpen: (i) másodrendű lineáris állandó együtthatós egyenlet, (ii) visszavezetés elsőrendű egyenletre, (iii) Laplace-transzformáció, (iv) Taylor-sor módszer (a harmadfokú tagokig).*

5. Feladat (8p+6p). *A Routh – Hurwitz-kritérium segítségével viszgáljuk meg, hogy aszimptotikusan stabil-e az origó. A* $V(x, y, z) = 10x^2 + 37xy + 39y^2 - 14xz - 25yz + 6z^2$ *függvénynek az origó szigorú globális minimuma (a bizonyítása plusz pontot ér). Ennek segítségével is vizsgáljuk meg az origó stabilitását.*

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -2x + 4y + z,\\
\dot{y} &= x - z,\\
\dot{z} &= 6y - z.
\end{aligned}$$