Matematika A4
Összefoglaló

Horváth Márk (http://www.math.bme.hu/~mhorvath)
Szabados Tamás feladatsorai alapján

2009. október 28.

1. Bevezető

A dokumentumban megpróbáltam öszegyűjteni az elméleti anyagot, mely a tantárgy két ZH-jának sikeres teljesítéséhez szükséges. Mind az elméléleti összefoglalók és a gyakorlati példák Szabados Tamás feladatsorain alapszanak.

A feladatokat három csoportra bontottam, *egyszerű*, *ZH szintű*, és *nehéz*. Az *egyszerű* feladatok egy-egy definíció vagy tétel alkalmazásával megoldhatóak (ilyenek nem valószínűek a ZH-kon). A *ZH szintű* feladatokhoz egy bizonyos objektum több tulajdonságát is ismerni kell, ill. szélesebb ismeretekre van szükség valószínűségszámítás - vagy a matematika más ágainak - területén. A ZH szintű feladatok sorszámát **kövér** betűkkel szedtem. A *nehéz* feladatokat szintén kövérrel szedtem, és *-gal is megjelöltem (ilyen nehézségű feladatok szintén nem valószínűek a ZH-kon).

rész I

ZH 1

2. Kombinatorika

	ismétlés nélküli	ismétléses
permutáció	$n!$ n futó beérkezésének sorrendje	$\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!}$ n golyót ennyi féle képpen állíthatunk sorba, ha $k_1, k_2, \ldots k_r$ db külön-külön egyszínű
variáció	$\frac{n!}{(n-k)!}$ n futó beérkezésének sorrendje ha csak az első k helyet tekintjük	l^k l darab betűből készíthető k hosszú szavak száma
kombináció	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ n golyóból kiválasztunk k darabot és nem számít a kiválasztás sorrendje	$\binom{k+l-1}{l}$ k féle sütiből (sok van belőlük) hazaviszünk l-et, ennyi féleképpen tehetjük meg

1. (I/5) A hét törpe minden este más sorrendben szeretne sorba állni, amikor Hófehérke a vacsorát osztja. Hányféleképpen tehetik ezt meg?

2. (I/7) Egy versenyen 5-en indulnak, az újságok az első három helyezett nevét közlik. Hányféle lehet ez a lista? (Közlik a helyezést is.)

3. (I/9) Van 6 lányismerősöm, és 2-t el akarok hívni moziba. Hányféleképpen tehetem ezt meg?

4. (I/11) Egy számkombinációs zárat 3 db különböző, 1 és 10 közötti szám begépelésével lehet kinyitni, de tudjuk, hogy a számok növekvő sorrendben vannak. Hány ilyen kombináció van?

3. Valószínűség

A valószínűség tárgya események egy rögzített rendszere, és ezekhez rendelt valószínűség illetve ezek tulajdonságai.

Ezt az alábbi hármassal reprezentáljuk, és *(Kolmogorov féle) valószínűségi mezőnek* hívjuk:

(Ω, F, P),

ahol Ω a lehetséges *kimenetelek tere* (pl: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$), F az *eseménytér* (pl: $F = \{\{\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$), és $P : F \to [0, 1]$ a *valószínűségi mérték.* Ez kifejezi, hogy egyes eseményeket mennyire tartunk valószínűnek. Példánkban $P(páros) = \frac{1}{2}$, $P(páratlan) = \frac{1}{2}$, $P(\{\}) = 0$ és $P(\Omega) = 1$. (Biztos esemény 1 valószínűségű ez "mindig" bekövetkezik. A lehetetlen esemény valószínűsége: 0.).

A kimenetelek tere tetszőleges halamaz lehet, míg az események tere ennek némely részhalmazát tartalmazza ($F \subseteq 2^{\Omega}$). Elképzelhető hogy a kimeneteleknek nem minden kombinációjához rendelünk valószínűséget (példánkban a kocka cinkelt, 1-est, és 6-ost nagyobb valószínűsággel dob, csak anyit tudunk, hogy párost és páratlant ugyanakkora valószínűséggel dob, ezért pl. az $\{1\}$ nem számít mérhető eseménynek).

Az F eseménytér és a P valószínűségi mérték további feltételeket kell teljesítsen, hogy az események valószínűségéről alkotott intuíciónknak megfeleljen (ezek közül az egyik legnevezetesebb a megszámlálható additivitás). Ezeket a szabályokat *Kolmogorov axiómáknak* hívjuk, ám itt eltekintük részletezésüktől.

4. Valószínűségi változó

Az $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvényket valószínűségi változónak hívjuk.

Ennek egy fontos következménye, hogy $t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ esetén $t(X)$ is valószínűségi változó, így minden művelet elvégezhető vele, ami egy valószínűségi változóval.

5. Diszkrét egyenletes eloszlás

Diszkrét egyenletes eloszlású valószínűségi változóról akkor beszélünk, ha

$P(X = x) = \frac{1}{|\Omega|}$,

minden lehetséges x értékre. Ebből következik, hogy

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$,

ahol $A \in F$.Ezt úgy is kifejezhetjük, hogy egy adott esemény valószínűsége:

$$valószínuség = \frac{kedvezokimenetelekszáma}{azösszeskimenetelszáma}$$

1. (I/17) Feldobunk egy érmét kétszer egymásután. Mi a valószínűsége, hogy dobunk fejet? És hogy pontosan 1 db fejet dobunk?

2. (I/19) Mi a valószínűsége annak, hogy két darab (szabályos) kocka feldobásakor legalább az egyik 6-os lesz? És annak a valószínűsége, hogy egyik sem lesz 6-os?

3. (I/22) Mennyi a valószínűsége, hogy ha egy polcon 7 db könyvet véletlenszerűen sorba rakunk, akkor egy köztük lévő trilógia kötetei egymás mellé kerülnek?

4. (I/24) A brazil labdarúgó válogatott edzésének megkezdése előtt, az edzésen résztvevő 22 játékost két csoportba osztják. Mi annak a valószínűsége, ha találomra történik a szétosztás a két 11-es csoportba, hogy Ronaldo és Ronaldinho egymás ellen játszik?

5. (I/25) Mi a valószínűsége annak, hogy egy 23 fős társaságban van legalább két olyan ember, akiknek a születésnapja ugyanarra a napra esik (tegyük fel, hogy az emberek az év 365 napján egyforma eséllyel születnek)?

6. **(I/28)** Először kiválasztunk egyet az 1,2,3,4,5 számjegyek közül, majd a maradékból egy másodikat (pl. egy cédulára felírjuk őket és kettőt kihúzunk visszatevés nélkül). Írja fel az eseményteret! Tegyük fel, hogy minden kimenetel egyformán valószínű. Adja meg annak a valószínűségét, hogy (a) elsőre páratlan számot húzunk (b) másodikra páratlan számot húzunk (c) mindkétszer páratlan számot húzunk! Írja fel a szóbanforgó eseményeket, mind kimenetelek részhalmazát!

7. (I/30) Feldobunk két szabályos kockát. Legyen A az az esemény, hogy a dobott számok összege páratlan, B az az esemény, hogy legalább egy hatost dobtunk. Írja fel az $A \cap B$, $A \cup B$, és $A \cap \bar{B}$ eseményeket mint kimenetelek részhalmazát! Számítsa ki a valószínűségüket! (tipp: Használja az additivitásra vonatkozó Kolmogorov axiómákat!)

8. (I/31) Egyszerűsítse le az alábbi kifejezéseket: (a) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$, (b) $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$, (c) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$. (tipp: Használja a De Morgan azonosságokat!)

6. Feltételes valószínűség

Vizsgálhatjuk egy (A) esemény bekövetkezésének valószínűségét úgy is, hogy ha tudjuk, hogy egy másik (B) esemény bekövetkezett. Például ha a lottón az első 4 szám talált, és még most húzzák az ötödik nyerőszámot, akkor nagyobb a telitalálat valószínűsége, mint a sorsolás megkezdése előtt. A fenti jelölésnél $P(A|B)$ a feltételes valószínűség. (Olvasva: A valószínűsége feltéve B-t). Számítása:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

1. (II/1) A barátommal snapszerozom. Ebben a játékban 20 darab lap van, minden színből 5. Kiosztok $5-5$ lapot. Mi a valószínűsége, hogy az ellenfélnek van zöldje, ha nekem 3 zöldem és két pirosam van? És ha nem tudom milyen lapjaim vannak (még nem néztem meg)?

2. (II/5) Egy iskolába 260 ember jár, 230 tanuló és 30 tanár. Egyszer egy influenzajárvány tört ki köztük. Az orvos az alábbi táblázatot készítette:

	Beteg	Egészséges	Összesen	Esemény
Fiú	50	60	110	B1
Lány	40	80	120	B2
Tanár	10	20	30	B3
Összesen	100	160	260	
Esemény	A1	A2		

   a) Véletlenszerűen kihúzunk egy kartont. Mi a valószínűsége, hogy: i) fiúé? ii) betegé? iii) beteg fiúé?

   b) Ha előzetesen a fiúk, lányok és tanárok kartonjait külön fiókokba gyűjtötték, én a lányokéból húzok, mi a valószínűsége annak, hogy beteg lányt húztam?

   c) Az orvos szorgos asszistense egy kupacba kidobálta a fiókokból az összes kartont, aki beteg volt. Ebből véletlenszerűen húzva egyet, mi a valószínűsége annak, hogy tanár az illető?

   d) (*) Ha kettőt húzok ugyanebből a beteg-kupacból egymás után, mi a valószínűsége, hogy az első fiú lesz, a második lány? És hogy mindkettő fiú lesz?

7. Szorzási szabály

Feltételes valószínűségek szorzási szabálya (avagy toronyszabály):

$$P(A_n \cap A_{n-1} \cap \dots A_1) = P(A_n|A_{n-1} \cap \dots A_2 \cap A_1) \cdot P(A_{n-1}|A_{n-2} \cap \dots A_2 \cap A_1) \cdot \dots P(A_3|A_2 \cap A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_1)$$

1. (II/7) Egy lakótelepen csótányirtást végeztek. Az első vegykezelés még a csótányok 60%-át irtja ki, de utána a csótányok egyre inkább immúnissá válnak, így a másodszorra már csak a 40%, harmadszorra pedig csak a 20%-uk pusztul el. Mi a valószínűsége, hogy egy megjelölt csótány a) átvészeli a teljes eljárást? b) az utolsó irtáskor pusztul el? c) túléli a kezelést, ha az első kezelés után még látták élve?

2. (II/8) Egy dobozban 16 alkatrész közül 3 hibás. Mi a valószínűsége, hogy három egymás után kivett alkatrész működőképes?

8. Teljes valószínűség tétele

1. Ha $H_n, H_{n-1}, H_{n-2}, \ldots, H_2, H_1$ teljes eseményrendszert alkot (azaz páronként diszjunktak és együtt kiadják a biztos eseményt), A pedig tetszőleges esemény, akkor:

$$P(A) = P(A|H_n) \cdot P(H_n) + P(A|H_{n-1}) \cdot P(H_{n-1}) + \ldots P(A|H_1) \cdot P(H_1)$$

2. (II/12) Iszákos Iván a nap 2/3 részét kocsmában tölti. Mivel a faluban 5 kocsma van, és nem válogatós, azonos eséllyel tartózkodik bármelyikben. Egyszer elindulunk, hogy megkeressük. Négy kocsmát már végigjártunk, de nem találtuk. Mi a valószínűsége annak, hogy az ötödikben ott lesz?

9. Bayes tétel

1. Ha tudjuk, hogy A már bekövetkezett, mi annak a valószínűsége, hogy ez pontosan H_i eseménnyel valósult meg? (Itt $H_1, H_2, \ldots H_n$ ismételten teljes eseményrendszert alkot.) A definíció szerinti képletet felírva a számlálóban a a feltételes valószínűség, a nevezőben a teljes valószínűség képletét alkalmazva adódik a következő képlet:

$$P(H_i|A) = \frac{P(A \cap H_i)}{P(A)} = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{P(A|H_n) \cdot P(H_n) + \cdots + P(A|H_1) \cdot P(H_1)}$$

2. **(I/13)** A ketyere gyárban az A, B és C gépsoron állítják elő a ketyeréket. Az A gépsoron a ketyerék 25, a B-n 35, a C-n 40%-át gyártják. Az A gépsoron előállított ketyerék 5%-a, a B gépsoron előállítottak 4%-a, a C-n gyártott ketyeréknek csak 2%-a hibás. A hibásakat félredobják egy nagy kupacba. Ebből véletlenszerűen kiszedve egy ketyerét, mi a valószínűsége, hogy azt az A, B, illetve a C gépsoron gyártották?

3. (I/16) Egy bináris csatornán a 0 jelet $1/3$, az 1 jelet $2/3$ valószínűséggel adják le. Mivel az adást zajok zavarják, ha 0-t adnak le, akkor $1/4$ valószínűséggel 1 érkezik, ha pedig 1-et adnak le, $1/5$ valószínűséggel 0 érkezik.

   a) Kaptunk egy 0-t. Mi a valószínűsége, hogy ezt 0-ként is adták le?

   b) Mi a valószínűsége, hogy 1-et kapunk?

10. Független események

Jelölés: az "A és B" eseményt ezentúl $A \cap B$-vel vagy AB-vel jelöljük.

1. A, B események függetlenek akkor és csak akkor, ha teljesül, hogy $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
   Több esemény függetlensége esetén nem csak annak kell teljesülnie, hogy

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \ldots P(A_n)$$

hanem tetszőleges A_i-k helyett mindkét oldalon azok komplementerét véve is igaz az egyenlőség, például:

$$P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \dots \cap A_n) = P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3})P(\overline{A_4}) \dots P(A_n)$$

Ilyen egyenletből 2^n darab van. Fordítva is igaz: ha az összes így származtatott egyenlet fennáll, akkor az $A_1, A_2, \dots A_n$ eseményekről azt mondjuk, hogy együttesen függetlenek.

2. (ellenpélda) Feldobunk egy érmét 3-szor egymás után. Mondjon olyan A, B, C eseményeket, hogy $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$, viszont a három esemény nem független!

3. (II/17) Kétszer egymás után feldobunk egy szabályos pénzérmét. Legyen A az az esemény, hogy elsőre fejet dobunk, B az az esemény, hogy másodikra dobunk fejet, C pedig, hogy a dobások egyezőek. Győződjünk meg róla, hogy A, B, C eseményekből bármely kettő független egymástól, de a 3 esemény együttesen már nem alkot független rendszert!

4. (III/12) Egy gyárban az I. gépsor az idő 60%-ában a II. gépsor az idő 70%-ában dolgozik egymástól függetlenül. Mi a valószínűsége hogy a) mindkét gép dolgozik, b) legalább az egyik dolgozik, c) csak az egyik gép dolgozik d) mindkét gép áll?

5. **(II/19)** Az A dobókockának 4 piros és 2 fehér oldala van, a B kockának pedig 2 piros és 4 fehér. Először feldobunk egy szabályos érmét. Ha fej, akkor a továbbiakban mindig az A kockával játszunk; ha írás, akkor pedig mindig a B kockával.

   a) Mutassa meg, hogy a piros dobásának valószínűsége mindig $\frac{1}{2}$.
   b) Ha az első két dobás piros, mi a valószínűsége, hogy a harmadik is piros?
   c) Ha az első három dobás piros, akkor mi a valószínűsége, hogy az A kockát használjuk? (Csak a kocka felső lapját látjuk, a kocka többi oldalát nem.)

6. **(II/20)** *(Felületes utazó)* Egy utazó az íróasztalában, a nyolc fiók egyikében hagyta az útlevelét. Mielőtt a repülőtérre indulna, kapkodva próbálja megtalálni. A kapkodás miatt $0,1$ valószínűséggel akkor sem veszi észre az útlevelet, ha az éppen megnézett fiókban van.

   a) Mi a valószínűsége, hogy nem találja meg az első 5 fiókban?
   b) Ha nem találta meg az első 5 fiókban, mi a valószínűsége, hogy az útlevél nem is volt ezekben?

7. **(II/22)** Minden héten egy szelvénnyel játszunk az ötös lottón. Hány hétig kell ezt megtennünk, hogy legalább $\frac{1}{2}$ valószínűséggel legyen legalább kettes találatunk?

   a) Mi a valószínűsége, hogy egy adott héten legalább kettes találatunk lesz, ha két függetlenül kitöltött szelvénnyel játszunk?
   b) Mi a valószínűsége, hogy egy adott héten legalább kettes találatunk lesz, ha két olyan szelvénnyel játszunk, amelyeken nincsen egyforma szám? (Segítség: A 90 számot ossza háromfelé: 5+5 szám van a szelvényeken, 80 szám pedig nincs egyiken sem.)

8. **(II/23)*** Szindbád, az Ezeregyéjszaka meséinek híres hőse, N háremhölgy közül szeretné kiválasztani a legszebbet, akik egyesével elsétálnak előtte. Szindbád az ún. *K-stratégiával* választ közülük: hagyja, hogy K lány elsétáljon előtte (ezek közül semmiképpen nem választ), majd kiválasztja az első olyat, aki minden korábban látottnál szebb. Feltéve, hogy a lányok között szépség szempontjából egyértelmű rendezés van, és egy teljesen véletlen sorrendben jönnek elő, mi a valószínűsége, hogy Szindbád ki tudja választani a legszebbet a K-stratégiával? Kb. mennyi az optimális K érték, ha N nagy? (Segítség: Alkalmazza a teljes valószínűség formuláját azokkal az A_r eseményekkel, hogy a legszebb lány r-edikként jelenik meg, $r = 1, 2, \ldots, N$. Határozza meg annak az eseménynek a feltételes valószínűségét, hogy az első $r - 1$ ($r > K + 1$) lányból a legcsinosabb nem esik az első K lány közé! Ugyanis ekkor Szindbád hibázni fog.)

11. Nevezetes diszkrét eloszlások

A diszkrét eloszlásokat *súlyfüggvényükkel* definiáljuk, azaz megadjuk, hogy mennyi egyes értékek valószínűsége: $p(x_i) = P(X = x_i)$.Ezen értékek aggregációjából kapjuk az *eloszálásfüggvényt*, ami szintén egyértelműen meghatározza az eloszlást: $F_X(x) = P(X < x) = \sum_{x_i<x} p(x_i)$.

1. *Indikátor (Bernoulli) eloszlás*:
   Egyetlen A kisérletet végzünk és azt nézzük, hogy hányszor következik be. Mivel egyetlenegyszer végezzük el a kísérletet, ezért a bekövetkezések számát X-szel jelölve két eset lehetséges: A bekövetkezik, azaz $X = 1$, vagy $\overline{A}$ következik be, azaz $X = 0$. Ezekre a valószínűség legyen: $P(X = 1) = p$ és $P(X = 0) = 1 - p$.
   Például egy kockadobással kapcsolatban legyen A a hatos dobás eseménye. Ekkor $P(A) = \frac{1}{6}$, vagyis $P(X = 1) = \frac{1}{6}$ és $P(X = 0) = \frac{5}{6}$.

2. *Diszkrét egyenletes eloszlás*:
   n érték közül mindegyik ugyanakkora valószínűséggel, vagyis $\frac{1}{n}$ valószínűséggel következik be. Például egy szabályos kockával való dobás értékei: $P(X = 1) = P(X = 2) = \cdots = P(X = 6) = 1/6$.

3. *Binomiális eloszlás*:
   Tipikus példa egy pénzdobás sorozatban a fejek száma. Ha n-szer dobtunk fel egy érmét, amely p valószínűséggel fej (tehát lehet, hogy hamis), akkor annak a valószínűsége, hogy pontosan k db fej van a dobások között:

   $$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

   Például, pontosan 3 hatos valószínűsége 20 dobásból: $P(X = 3) = \binom{20}{3}(1/6)^3(5/6)^{17}$.

   Várható értéke np; módusza $\lfloor (n + 1)p \rfloor$, ha $(n + 1)p$ nem egész.

   (A binomiális eloszlás valójában n db indikátor eloszáls konvolúciója.)

4. *Hipergeometrikus eloszlás*:
   A darab piros, és B darab fehér golyó közül húzunk n darabot. Annak a valószínűsége, hogy pontosan k darab piros golyót húzzunk ki:

   $$P(X = k) = h_{A,B,n}(k) = \frac{\binom{A}{k}\binom{B}{n-k}}{\binom{A+B}{n}}$$

Például, 2 találat valószínűsége az ötös lottón: $P(X=2)=\frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}$.

Várható értéke np, ahol $p=A/(A+B)$.

12. Eloszlások tulajdonságai

12.1. Várható érték

Egy X valószínűségi változóra megfigyelhető lehetséges értékeket jelöljük x_i-vel, a hozzájuk tartozó valószínűségeket (azaz $P(X=x_i)$-ket) pedig $p(x_i)$-vel vagy p_i-vel. Ekkor a várható érték: $\mathbb{E}(X)=\sum_i P(X=x_i)\cdot x_i = \sum_i p(x_i)\cdot x_i=\sum_i p_i\cdot x_i$.

- A várhatóérték képzés lineáris művelet, azaz: $\mathbb{E}(aX+b)=a\mathbb{E}(X)+b$.
- Tetszőleges (nem csak független) valószínűségi változók várható értéke összeadódik: $\mathbb{E}(X+Y)=\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$.
- Független valószínűségi változók esetén az is igaz, hogy $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
- Mivel $\mathbb{E}(t(X))=\sum_i p_i\cdot t(x_i)$, általában **nem igaz** az, hogy $\mathbb{E}(t(X))=t(\mathbb{E}(X))$.
- A nagy számok törvénye (tétel) szerint a kisérletszám növekedésével a kisérleti eredmények számtani átlaga tart az elméleti úton kiszámolt várható értékhez.

1. (III/19) Mennyi a szabályos kockával végzett kockadobás során a dobott szám várható értéke?
2. (III/20) A diszkrét $\mathbb{P}$ eloszlás súlyfüggvénye: $p(x)=\frac{x^2}{30}$ $(x=1,2,3,4)$. Mennyi az eloszlás várható értéke?
3. (IV/23) Péter, ha kockával páratlant dob 100 Ft-ot veszít, ha 6-ot dob 400 Ft-ot nyer, ha 2-öt, vagy 4-et dob, újból dob. A második dobásnál 10 Ft-ot nyer, ha párost dob, 20-at veszít, ha páratlant dob. Előnyös-e ez a játék számára?
4. (IV/30) Pista és Zoli kockáznak. Mindketten feldobnak egymás után egy piros és egy zöld kockát. Ha Pista 1-et vagy 2-t dob, ő nyer, és kap Zolitól 5 Ft-ot; ha Zoli 6-ot dob, ő a nyertes, és 11 Ft-ot kap Pistától. Ha egyikük sem nyer, illetve ha mindketten egyszere dobnak nyerőt, nem fizetnek, hanem elölröl kezdik a dobálást. Zoli azt javasolja, hogy ne koptassanak két kockát, inkább kérjék meg Józsit, dobáljon ő az egyetlen fekete kockával, de a nyerési és fizetési feltételek maradjanak változatlanok. Érdemes elfogadni Pistának Zoli ajánlatát?
5. (IV/31) Egy játékos 250 Ft-ot befizet a banknak, majd egy kockával, amelynek öt oldala zöld, hatodik pedig fekete, egy sorozatot dob. Bármelyik dobás után bejelentheti, hogy nem akar tovább játszani és ilyenkor annyiszor 100 Ft-ot kap, ahány zöldet dobott addig. Ha viszont bármikor feketét dob, akkor vége a sorozatának, és semmit se kap a banktól. Keresse meg a játékos számára optimális stratégiát és győződjön meg, hogy még az is veszteséges!

12.2. *Módusz*

A legnagyobb valószínűséggel előforuló érték, amit az adott valószínűségi változó felvesz: $módusz(X) = \arg\max_x P(X = x)$

- Ahogy a várható értéknél, itt is igaz az hogy: $módusz(aX + b) = a * módusz(X) + b$.
- A módusz művelet átcsoportosítható transzformációkra nézve: $módusz(t(X)) = t(módusz(X))$

1. **(III/4)** Blicc úr minden nap villamossal megy dolgozni, de nincs bérlete, sem jegye. A villamosra minden nap 0,2 valószínűséggel száll fel ellenőr, és ilyenkor 0,95 valószínűséggel elkapja Blicc urat. (Az ellenőr minden nap az addigiaktól függetlenül dönti el, ellenőrzi-e aznap Blicc úr villamosát.)

   a) Mennyi a valószínűsége, hogy Blicc úrnak "szerencsés hete" van, azaz az 5 munkanap egyikén sem kell büntetést fizetnie?

   b) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan kétszer kapják el egy hét munkanapjai alatt?

   c) Feltéve, hogy Blicc úrnak "szerencsés hete" volt, mi a valószínűsége, hogy mind az ötször volt ellenőr a villamoson?

   d) Mi a valószínűsége hogy csütörtökön büntetik meg másodszor?

2. (III/5) Egy szöcske elindul a számegyenes origójából. Minden lépésnél 1/2 valószínűséggel jobbra, 1/2 valószínűséggel balra ugrik. 20 ugrás megtétele után

   a) milyen valószínűséggel lesz a 0-ban?

   b) milyen valószínűséggel lesz az 1-ben?

   c) milyen valószínűséggel lesz a (-2)-ben, ha az utolsó előtti ugrás után a (-3)-ban volt?

3. (III/7) 80 üveg bor van egy borospincében össze-vissza lerakva, ebből 30 fehér, 50 vörös. A vendégek a fogadóstól 3 üveg fehér és 7 vörösbort rendelnek, de a pincében kiégett a villany. A fogadós véletlenszerűen kiválaszt 10 üveget. Mi a valószínűsége, hogy minden vendég kap neki megfelelő itókát?

4. **(III/8)** Van két érmém, az egyik igazságos érme, a másik cinkelt, de ránézésre nem tudom őket megkülönböztetni egymástól. A cinkelt érme 3/4 valószínűséggel mutat fejet. Előveszem az egyik érmét a zsebemből, 1/2 eséllyel az igazságosat, 1/2 eséllyel a cinkeltet. A kiválasztott érmét feldobom 30-szor, és azt tapasztalom, hogy 25-ször mutatott fejet. Mi a valószínűsége, hogy a cinkelt érmét vettem elő?

5. **(III/9)*** Egy dobozban N darab cédula van 1-től N-ig megszámozva. Visszatevés nélkül húzunk n-szer, majd a kihúzott számokat nagyság szerint sorba rakjuk. Tekintsük a nagyság szerinti

   a) legkisebbet,

   b) legnagyobbat,

   c) 2. legkisebbet,

   d) 3. legkisebbet,

   e) s-edik legkisebbet.

Határozza meg ezeknek a valószínűségi változóknak az eloszlását: adja meg a súlyfüggvénynek a képletét! Határozza meg az eloszlás móduszát!

6. **(III/14)** Van két érmém, az egyik igazságos érme, a másik cinkelt, de ránézésre nem tudom őket megkülönböztetni egymástól. A cinkelt érme 3/4 valószínűséggel mutat fejet. Előveszem az egyik érmét a zsebemből, 1/2 eséllyel az igazságosat, 1/2 eséllyel a cinkeltet, és odaadom a hallgatóknak. 30 dobás után el kell dönteniük, melyik érme volt, amit elővettem. Hol húznák meg a döntési határt? (A 30 dobás közül hány fej az a maximális, amikor még az igazságos érmére tippelnének?)

13. További nevezetes diszkrét eloszlások

1. *Poisson-eloszlás*
   Ha az X valószínűségi változó a $0, 1, 2, \dots$ értékeket veheti fel és

$$P(X = k) = p(k) = p_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

   ahol $\lambda > 0$ egy tetszőleges valós szám, akkor X eloszlását λ paraméterű Poisson-eloszlásnak nevezzük. Várható értéke λ. Módusza $\lfloor\lambda\rfloor$, ha λ nem egész szám. Ha λ egész szám, a módusz $\lambda - 1$.

   - Poisson eloszlást használunk pl. adott időegység alatt bekövetkező függelten események számának modellezésére (pl addot időegység alatt bekövetkező kérések száma egy web-serveren.).
   - Egy ökölszabály a Poisson eloszlás használatára, hogy n (a független lehetőségek száma) legalább 20 legyen, az egyes események bekövetkezési valószínűsége pedig legfeljebb 0.05.

2. a) *Geometriai eloszlás (optimista) "addig jár a korsó a kútra..."*:
   Hányadik dobásra jön elő az első hatos? $P(X = k) = (5/6)^{k-1}(1/6)$. Általánosabban: optimista, p paraméterű geometriai eloszlású az a valószínűségi változó, ami a siker első előfordulásáig szükséges kísérletek számát számolja (a sikeres kísérlettel együtt), ahol a független kísérletekben a siker valószínűsége p: $P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$ $(k = 1, 2, \dots)$.
   - Ha egy diszkrét eloszlás örökifjú (látsd később), az csak a geometriai eloszlás lehet.

   b) *Geometriai eloszlás (pesszimista)*:
   Hányat nemhatost dobok az első hatos dobás előtt? $P(X = k) = (5/6)^k(1/6)$. Általánosabban: pesszimista, p paraméterű geometriai eloszlású az a valószínűségi változó, ami az első sikerig bekövetkezett kudarcokat számolja, ahol a független kísérletekben a siker valószínűsége p: $P(X = k) = (1 - p)^k p$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$.

   c) *Negatív binomiális eloszlás (optimista)*:
   Hányadikra jön ki a harmadik hatos? $P(X = k) = \binom{k-1}{2}(1/6)^2(5/6)^{k-3}(1/6) = \binom{k-1}{2}(1/6)^3(5/6)^{k-3}$. Általánosabban [NBIN$_{opt}(n, p)$]: a siker valószínűsége p, a valószínűségi változó azt számolja, hányszor kell a kísérlet elvégezni, hogy megkapjuk az n-edik sikert: $P(X = k) = \binom{k-1}{n-1}p^n(1 - p)^{k-n}$ $(k = n, n + 1, n + 2, \dots)$.

   d) *Negatív binomiális eloszlás (pesszimista)*:
   Hányat nemhatost dobok a harmadik hatos dobás előtt? $P(X = k) = \binom{k+2}{2}(1/6)^2(5/6)^k(1/6) =$
   $\binom{k+2}{2}(1/6)^3(5/6)^k$. Általánosabban [NBIN$_{pessz}(n, p)$]: a siker valószínűsége p, a valószínűségi

változó azt számolja, hány kudarc előzi meg az n-edik sikert: $P(X = k) = \binom{k+n-1}{n-1} p^n (1 - p)^k = \binom{-n}{k} p^n (-q)^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$ és $q = 1 - p$).

3. (IV/1) A tanult nevezetes eloszlások közül melyik illik legjobban az alábbi valószínűségi változók modellezésére?

   a) hányadik autó vesz fel, amikor kiállok az országútra, mert autóstoppal akarok utazni?

   b) 10 autó közül hány vesz fel stopposokat?

   c) a 12. autó a harmadik piros?

4. **(IV/4)** 100 kulcs közül csak 1 nyitja az előttünk lévő ajtót. A sötétben nem látjuk, hogy melyik kulcsot próbáltuk már ki, így a próbálgatások során többször is a kezünkbe kerülhet ugyanaz kulcs. Mi a valószínűsége, hogy legfeljebb 50 próbálkozással kinyitjuk az ajtót? És ha a kipróbált kulcsokat félretesszük? Átlagosan hány próbálkozásra van szükség a két esetben?

5. (IV/9) Egy gyárban futószalag szállítja az alkatrészeket. A futószalag leáll, ha selejtes termék érkezik. A termékek 2%-a selejtes. Mi az eloszlása annak a valószínűségi változónak, ami azt számolja, hogy

   a) hányszor állt le a szalag az n-edik termékig (őt is beleértve)?

   b) hány terméket gyártott a gép az n-edik leállásig?

   c) hány terméket szállított két leállás között?

   d) hány leállás történt egymás után anélkül, hogy egyetlen jó termék is keletkezett volna? (Selejtszéria hossza.)

6. (IV/12) Egy kollégiumban egy év alatt 0.1%-os valószínűséggel üt ki tűz. Mennyi a valószínűsége, hogy 5 év alatt legalább 1 tűzeset van? (Számoljuk ki a korábban tanult módszerekkel, és a Poisson eloszlás segítségével is!)

7. **(IV/20)** Egy forgalmas országútszakaszon, ahol máskor is szoktak radarozni, figyelik, hogy 5 perc alatt hány autó lépi át a megengedett sebességhatárt. Tapasztalat szerint kb. ugyanolyan valószínű, hogy lesz ilyen autó, mint az, hogy nem lesz. Mennyi a valószínűsége, hogy az 5 perc alatt pontosan három autó lépi át a megengedett sebességhatárt?

8. **(IV/14)** Sok év statisztikája áll rendelkezésünkre arra nézve, hogy naponta hány lakástűz volt Budapesten. A napi négy tűzeset ugyanolyan relatív gyakorisággal fordul elő, mint az öt tűzeset. Becsülje meg, hogy a napok körülbelül hány százalékában fordul elő a két tűzeset!

9. **(IV/15)** Átlagosan hány szem mazsolának kell lennie egy sütiben ahhoz, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott sütiben 99%-os valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?

10. **(IV/25)** Egy dobozban 5 piros és 2 kék golyó van. Visszatevés nélkül húzzunk addig, amíg az első kék golyót kihúzzuk. Jelöljük X-szel az első kék golyó húzásának sorszámát. Tekintsük egy ilyen húzássorozatot egy kísérletnek. a) Adjuk meg az X valószínűségi változó eloszlását! b) Számítsuk ki a X valószínűségi változó várható értékét!

11. (IV/32) Mennyi a lottón a találatok számának várható értéke?

14. Folytonos eloszlások jellemzése

Eloszlás- és sűrűségfüggvény

Az eloszlásfüggvény x pontban felvett értéke megadja, hogy az X valószínűségi változó mekkora valószínűséggel vesz fel az x valós számnál kisebb értéket:
$F(x) = \mathbb{P}(X < x), \qquad x \in \mathbb{R}$.

Az eloszlásfüggvény jellemzői:

1. a $(-\infty)$-ben 0-hoz, a ∞-ben 1-hez tart,
2. monoton növekvő (nem feltétlenül szigorúan!) vagyis ha $x_1 < x_2$, akkor $F(x_1) \leq F(x_2)$,
3. mindenhol balról folytonos.

A félév során kétféle eloszlással fogunk foglalkozni:
(a) Ahol az $F(x)$ eloszlásfüggvény szakaszonként konstans, véges sok vagy megszámlálható sok $x_1, x_2, \ldots$ ugrással: ez a *diszkrét eloszlások* esete. Az ugrások nagysága a *súlyfüggvény*: $p(x_k) = F(x_k+) - F(x_k) = \mathbb{P}(X = x_k)$.
(b) Ahol $F(x)$ folytonos: ekkor X eloszlását *folytonosnak* nevezzük. Ebben az esetben azt is feltesszük, hogy van olyan f *sűrűségfüggvény*, amellyel
$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \qquad x \in \mathbb{R}$.

Minden olyan x pontban, ahol f folytonos, fennáll, hogy $f(x) = F'(x)$. Tetszőleges (a, b) vagy $[a, b]$ intervallumba esés valószínűsége a folytonos esetben:
$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$.

A sűrűségfüggvény tulajdonságai:

1. $f(x) \geq 0$ minden x-re,
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$.

A valószínűségi változó *várható értéke* a folytonos esetben:
$\mathbb{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

és tetszőleges $t(X)$ függvényének várható értéke: $\mathbb{E}(t(X)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t(x)f(x)dx$.

15. Nevezetes folytonos eloszlások

1. *Folytonos egyenletes eloszlás*

   Ha egy véges intervallumra úgy dobunk egy pontot, hogy a pont az intervallum bármely részintervallumára annak hosszával arányos valószínűséggel esik, akkor a pont koordinátája egyenletes eloszlású az adott intervallumon. Jelölje a és b ennek a véges intervallumunk két végpontját. Annak a valószínűsége, hogy egy ilyen eloszlású véletlen szám egy d hosszúságú részintervallumba essen (a fentiek alapján): $\frac{d}{b-a}$.

   valószínűség $= \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz hossza}}{\text{az egész eseménytér hossza}}$

Ez alapján egy folytonos elszlású valószínűségi változó ($X\tilde{}E(a,b)$) eloszlásfüggvénye: $F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}$, ha $x \in (a,b)$, és 0 vagy 1 különben. Sűrűségfüggvénye $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$, ha $x \in (a,b)$ és 0 különben.

Általánosítás:

Hasonló elgondolás alapján ha egy pont egy véges területű síktartomány bármely részére a kiválasztott rész területével arányos valószínűséggel esik, akkor a pont helyének eloszlása egyenletes eloszlású az adott síktartományon:

valószínűség $= \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz területe}}{\text{az egész eseménytér területe}}$

Véges térfogatú térrészen értelmezett egyenletes eloszlás esetén:

valószínűség $= \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz térfogata}}{\text{az egész eseménytér térfogata}}$

2. *Exponenciális eloszlás*

   Egy valószínűségi változó *örökifjú* (más néven: *memória nélküli*) tulajdonságú, ha teljesül rá a következő: $\mathbf{P}(X > s+t|X > t) = \mathbf{P}(X > s)$ minden $s, t \geq 0$ esetén. Azaz ha a valószínűségi változó valaminek az élettartama, akkor az örökifjú tulajdonság jelentése a következő: amíg a szóbanforgó dolog "él", a további jövőjét illetőleg esélyei olyanok, mint egy "újszülött" dolognak.
   Egy pozitív értékű folytonos valószínűségi változó akkor és csak akkor örökifjú tulajdonságú, ha exponenciális eloszlású.
   Megjegyzés:
   Egy X eloszlásról azt mondhatjuk, hogy öregedik, ha $\mathbf{P}(X > s+t|X > t) < \mathbf{P}(X > s)$ teljesül rá. *Példa*: egy elhasználódó alkatrész élettartama.
   Hasonlóan azt mondhatjuk, hogy fiatalodik, amennyiben $\mathbf{P}(X > s+t|X > t) > \mathbf{P}(X > s)$. *Példa*: egy nagyon elmaradott országban született csecsemő élettartama.

   λ paraméterű exponenciális sűrűségfüggvénye: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, eloszlásfüggvénye: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ha $x > 0$.

   A λ paraméterű exponenciális eloszlás várható értéke: $1/\lambda$. Tehát ha egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értéke adott, akkor a paramétere a várható érték reciproka.

3. **(V/6)** Egy tüzérségi lövedék a célterületet egy r sugarú körön belül éri el. A körön bármely területre érkezés valószínűsége arányos az adott terület mérőszámával.Az X valószínűségi változó jelentse a becsapódás pontjának távolságát a célterület középpontjától. Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét! Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lövedék az $r/2$ ill $3r/4$ sugarakkal határolt körgyűrű belsejébe esik?

4. **(V/7)** Egy l hosszúsági ropit találomra választott pontban kettétörünk. Mi az így keletkezett darabok közül a rövidebbik eloszlásfüggvénye?

5. **(V/9)** Válasszunk az egységnégyzetben egyenletesen egy pontot. Jelölje X e pontnak a négyzet legközelebbi oldalától vett távolságát. Határozzuk meg az X eloszlását! Mi annak a valószínűsége, hogy a pontunk távolabb van az oldalaktól, mint $1/4$? Mennyi X várható értéke?

6. (V/11) Egy távolsági busz egyenletes eloszlás szerint érkezik a megállóba, munkanapokon 13:00 és 13:15 között, hétvégén 13:00 és 13:10 között. Utazásaim $1/3$-a hétvégére, $2/3$-a hétköznapra esik. Mindig 13:00-ra érkezünk a buszmegállóba. Határozzuk meg a buszra várakozás eloszlását. Mi annak a valószínűsége, hogy kevesebb mint 5 percet kell várakoznunk?

7. **(V/13)** Egyenletesen választunk egy pontot a egységsugarú félköríven, majd az így kapott pontot levetítjük az átmérőre. Mi annak a valószínűsége, hogy az így kapott pont a $(-0.5, 0.5)$ intervallumba esik? Mi annak a valószínűsége, hogy kisebb, mint 0? És, hogy kisebb, mint $\frac{\sqrt{3}}{2}$? *(Az így kapott eloszlás az árkuszszinusz-eloszlás.)*

8. **(V/15)** Egy buszmegállóban annak a valószínűsége, hogy a kövekező t percen belül jön busz $1 - e^{-8t}$. Mi annak a valószínűsége, hogy több mint 10 percet kell várakoznunk? És annak, hogy kell várnunk legalább 5 prcet, de legfeljebb 10-et? Mi a várakozási időnk várható értéke? Mi annak a valószínűsége, hogy ha már sikertelenül vártunk 4 percet, akkor kell még várnunk legalább 10 percet?

9. **(V/16)** Legyen X^2 egyenletes a $[0, 1]$-en. Mi lesz X eloszlása? Mi a mediánja, várható értéke?

10. **(V/19)** Bizonyítsuk be, hogy az
$\mathbb{P}(X < x) = F(x) = 1 - e^{-x^2}$ ha $x \geq 0$,
$\mathbb{P}(Y < y) = G(y) = 1 - e^{-\sqrt{y}}$ ha $y \geq 0$,
eloszlásfüggvényekkel megadott X és Y valószínűségi változók közül az egyik öregedő, a másik fiatalodó!

11. **(V/20)** Egy utcai telefonfülke foglalt, amikor odaérek. A beszélgetés hossza véletlen, percekben mérve $\frac{1}{3}$ paraméterű exponenciális eloszlású. Mi a valószínűsége, hogy 5 perc múlva sem kerülök sorra? Mi a helyzet akkor, ha tudjuk, hogy odaérkezésünkkor már 2 perce tart a beszélgetés?

12. **(V/21)** Adott típusú elektromos berendezések 2%-a 1000 üzemórán belül elromlik. Tegyük fel, hogy a meghibásodásig eltelt idő exponenciális eloszlást követ. Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen berendezés az átlagosnál tovább működik?

13. **(V/22)** Egy örökifjú tulajdonságú villanykörténél $\frac{2}{3}$ annak a valószínűsége, hogy 2000 óránál többet üzemel. Egy városban 200 ilyen égőt helyezünk el. Mi a valószínűsége annak, hogy 200 óra elteltével éppen 150 égő világít?

16. Nevezetes eloszlások és tulajdonságaik

A táblázatba összefűjtöttem a nevezetes eloszlások tulajdonságait, emlékeztető jelleggel. A részletek, pl. értelmezési vagy nulla értékű tartományok nem fértek ide, továbbá a módusz értékek sem mindig egyértelműek (ahol jelentős plusz információra van még szükség, azt *-gal megjelöltem).

$(1 - p)$-t q-val jelöltem, hogy elférjen a táblázatban.

Eloszlás	Súly,-sűrűségfv.	Eloszlásfv.	Várható érték	Módusz	Szórás^2
Diszkrét egyenletes	$\frac{1}{\lvert\Omega\rvert}$				
Indikátor	p ill q		p	0 v 1	pq
Binomiális	$\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$		np	$\lfloor (n+1)p \rfloor *$	npq
Hipergeometrikus	$\frac{\binom{A}{k}\binom{B}{n-k}}{\binom{A+B}{n}}$		np		
Poisson	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$		λ	$\lfloor \lambda \rfloor, \lambda - 1*$	λ
Negatív binomiális (opt)	$\binom{k-1}{n-1}p^n q^{k-n}$		$\frac{r}{p}*$		
Geometriai (opt)	$q^{k-1}p$	$1-q^k$	$\frac{1}{p}$	1	$\frac{q}{p^2}$
Folytonos egyenletes	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$[a, b]$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponenciális	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1-e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	0	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normális	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-m}{\sigma}\right)^2}$	$\Phi\left(\frac{y-m}{\sigma}\right)$	m	m	σ^2

- Vegyük észre a hasonlóságot a geometriai és az exponenciális eloszlás tulajdonságai között (mindkettő örökifjú)!
- Megfigyelhető, hogy folytonos paraméterű, diszkrét eloszlások esetén szükségszerű, hogy a paraméter némely értéke mellett, több diszkrét érték is azonosan valószínű. (Ld. *-ok a módusz oszlopban!)

1. **(ZH nehézségű)** Jó gyakorlás a folytonos eloszlások eloszlás függvényének kiszámolása a sűrűségvüggvényből, és fordítva.
2. **(ZH nehézségű)** Számolja ki a folytonos eloszlások várható értékékét és szórását (a szórás az első ZH-hoz nem kell).
3. **(ZH nehézségű)** Számolja ki a diszkrét eloszlások szórását! (A szórás az első ZH-hoz nem kell.)

Mj: A normális eloszlás és a szórás értékek ismerete nem szükséges az 1. ZH-hoz!

rész II
ZH 2

A második ZH sikeres teljesítéséhez elengedhetetlen a korábbi eloszlás táblázat ismerete...

17. Szórás és szórás négyzet

- Az m várható értékű diszkrét valószínűségi változó *szórásnégyzete*: $\sigma^2 = \sum\limits_{x_k} (x_k - m)^2 p(x_k)$.
- Folytonos esetben: $\sigma^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 f(x) dx$.
- Ezekkel ekvivalens általánosabb definíció: $\sigma_X^2 = E((X - E(X))^2)$.Ez diszkrét és folytonos valószínűségi változó esetén egyaránt használható.
- Az előbbi definíciót kicsit tovább alkítva kapjuk, hogy:

  $$\sigma_X^2 = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - 2E(XE(X)) + E^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

  Ezt úgy is mondhatjuk, hogy: $\sigma^2 = m_2 - m^2$.
- Ugynebből a definícióból kiindulva, és a várható érték linearitására vonatkozó ismereteinket felhaználva kapjuk, hogy:
  - $\sigma_{cX}^2 = c^2 \sigma_X^2$, azaz $\sigma_{cX} = |c| \sigma_X$
  - $\sigma_{X+b}^2 = \sigma_X^2$
  - $\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_Y^2 + \sigma_Y^2$,ha X és Y függetlenek.
  - ebből következik, hogy $\sigma_{\sum X_i}^2 = n\sigma^2$ (ahol X_i független, azonos σ szórású valószínűségi változók)
  - illetve $\sigma_{\frac{\sum X_i}{n}}^2 = \frac{\sigma_Y^2}{n}$ és $\sigma_{\frac{\sum X_i}{n}} = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}}$ (Ez abban is megnyilvánul, hogy több mérést végezve, a mérések átlagának szórása csökken.)

1. **(ZH szintű)** Bizonyítsa be a fenti állításokat, a várható érték tulajdonságainak ismeretében.
2. **(VII/1)** Számítsa ki a Poisson-eloszlás, a geometriai eloszlás, a standard és általános normális eloszlás szórását!
3. **(VII/2)*** Számítsa ki a λ paraméterű exponenciális eloszlású X valószínűségi változó szórását és a várható értéktől való átlagos abszolút eltérését! Mennyi a medián, az alsó és a felső kvartilis, illetve általában a p-kvantilis értéke? (A folytonos F eloszlásfüggvényű eloszlás p-kvantilise az az x, amelyre $F(x) = p$; a medián és a kvartilisek ennek speciális esetei rendre $p = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, illetve $\frac{3}{4}$ értékekkel.)

4. **(VII/3)** Számítsa ki az $[a, b]$ intervallumon vett egyenletes eloszlású X valószínűségi változó szórását és átlagos abszolút eltérését! (Az utóbbi az $\mathbb{E}|\mathbb{X} - \text{medián}|$ várható értéket jelenti.)

5. (VII/4) Számítsa ki az $f(x) = 2x \quad$ ha $0 < x < 1$ sűrűségfüggvényű X valószínűségi változó szórását és átlagos abszolút eltérését!

6. (VII/6) Legyen X egy dobókockával dobott szám. Mennyi X szórása? Mi a helyzet n oldalú "kocka" esetén?

7. **(VII/7)** Egy dobozból, amiben 4 piros és 6 fehér golyó van, visszatevés nélkül kihúzok 3 golyót. Jelölje X a kihúzott piros golyók számát! Mennyi X szórása?

8. **(VII/8)** Legyenek az $X_i(i = 1 \dots 4)$ valószínűségi változók függetlenek és azonos indikátor eloszlásúak, azaz értékük p valószínűséggel 1 és $(1 - p)$ valószínűséggel 0! Legyen $Y_j = \sum_{i=1}^{j} X_i (j = 1 \dots 4)$! Mennyi $Y_j (j = 1 \dots 4)$ szórása, illetve második momentuma $p = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{4}$, illetve általános esetben?

18. Normális eloszlások

A *standard normális eloszlás* sűrűségfüggvénye: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad$ ha $-\infty < x < \infty$,
eloszlásfüggvénye: $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t) dt \quad$ ha $-\infty < x < \infty$.

Az $m \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ paraméterű (m a várható érték, σ az ún. szórás, l. később) *normális eloszlás* a standard normálisból származtatható. Ha X standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor az $Y = \sigma X + m$ valószínűségi változó m és σ paraméterű normális eloszlású; Y eloszlásfüggvénye:

$$F(Y) = \mathbb{P}(Y < y) = \mathbb{P}(\sigma X + m < y) = \mathbb{P}\left(X < \frac{y - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{y - m}{\sigma}\right),$$

sűrűségfüggvénye:

$$f(y) = F'(y) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{y - m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-m}{\sigma}\right)^2}.$$

Eloszlás és sűrűség függvények ilyen transzformációja más feladatoknál is gyakran előfordul.

1. (VI/2) Számítsuk ki a következő valószínűségeket, ha X standard normális eloszlású valószínűségi változó!
(a) $\mathbf{P}(-1 < X < 1)$ (b) $\mathbf{P}(-2 < X < 2)$ (c) $\mathbf{P}(-3 < X < 3)$

2. (VI/4) Egy nagy populációban az emberek átlagos testmagassága 178 cm, a magasságok szórása 9 cm, és a magasság normális eloszlásnak tekinthető. Mennyi ekkor annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott személy testmagassága 169 és 187 cm közé esik? Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezen személy magasabb 2 méternél? Most mennyi az az érték, amelynél kisebb magasság 0.2, 0.9, illetve 0.99 valószínűségű?

3. (VI/8) Egy gyár autómotorokba való gyertyákat készít. A gyertyák átlagosan 1170 órán keresztül működnek, 100 óra szórással. A gyár olyan működési idő garanciát akar vállalni, amelynél hamarabb csak a gyertyák legfeljebb 5%-a hibásodik meg. Hány óra legyen a válalt működési idő?

A standard normális eloszlásfüggvény táblázata: $\Phi(x) - \frac{1}{2}$ *értékei*

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998

19. Többdimenziós diszkrét eloszlások

1. (VII/10) Először egy kockával dobunk, majd annyi érmével, ahányast a kockával dobtunk. Mi a valószínűsége, hogy a kockával 4-est dobunk és az érmékkel 2 fejet kapunk? Mi a valószínűsége,

hogy 5 fejet kapunk?

2. (VII/12) Vegyük azt a két dimenziós diszkrét eloszlást, aminek a valószínűségeit az alábbi táblázat határozza meg!

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0.1	0.2	0.2
2	0.1	0.2	0
3	0.1	0	0.1

   a) Mi a valószínűsége, hogy $X = 2$ és $Y = 1$?
   b) Mi a valószínűsége, hogy $Y = 3$?
   c) X^2Y várható értéke?
   d) Feltéve, hogy $Y = 3$ mi X eloszlása?
   e) Független-e X és Y?

20. Sűrűségfüggvény a síkon

Sűrűségfüggvény tulajdonságai:

1. • $f(x, y) \geq 0$, minden x, y valós számra.
   •
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

Az A tartományba esés valószínűsége:

$$P(A) = \iint_A f(x, y) dx dy$$

Feladatok:

1. (VII/13) Az alábbi függvények melyike sűrűségfüggvény? (Amelyik tartomány nincs megadva, ott a függvény 0.)

   a)
$$f(x, y) = \frac{4}{5}(x + xy + y) \quad , \quad \text{ha} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

   b) **(ZH szintű)**
$$f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \quad , \quad \text{ha} \quad x > 0, \quad y > 0$$

c)

$$f(x,y) = 4xy - 10 \quad , \quad \text{ha} \quad x^2 + y^2 < 1$$

d)

$$f(x,y) = \frac{1}{x} \quad , \quad \text{ha} \quad 0 < y < x < 1$$

2. (VII/14) Határozzuk meg c-t úgy, hogy $f(x,y)$ sűrűségfüggvény legyen:

$$f(x,y) = cy \quad , \quad \text{ha} \quad x > 0, \quad y > 0, \quad x + y < 1.$$

3. **(VII/15)** Vegyük az $f(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$ $(x,y > 0)$ sűrűségfüggvényt. Számítsuk ki az alábbi események valószínűségét:

   a) $0 < X < 1$ és $0 < Y < 1$
   b) $1 < X < 5$ és $2 < Y < 8$
   c) $0 < X < 1$
   d) $3 < Y < 5$

21. Kétdimenziós valószínűségi változó függvényének várható értéke

A $t(X,Y)$ valószínűségi változó várható értéke:

$$\mathbb{E}t(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(x,y) : f(x,y) dx dy.$$

Speciálisan X és Y szorzatának várható értéke:

$$\mathbb{E}(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x,y) dx dy.$$

1. *Feladatok:*

2. **(VII/16)** Vegyük a következő kétdimenziós valószínűségi változót:
   Első koordinátája legyen $X = \sqrt{RND_1}$. A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy másik véletlen szám négyzetgyökével: $Y = \sqrt{RND_1} \cdot \sqrt{RND_2}$.

   a) Számoljuk ki e kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!
   b) Legyen $t(x,y) = xy$. Mennyi a $t(X,Y)$ valószínűségi változó várható értéke?
   c) Legyen $t(x,y) = xy^2$. Mennyi a $t(X,Y)$ valószínűségi változó várható értéke?

3. **(VII/17)** Legyen X a $[0,1]$-en egyenletes, Y pedig az $[X,1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Mi az együttes sűrűségfüggvényük? Mi X várható értéke? Mi Y várható értéke? Mi a szorzatuk, azaz XY várható értéke? Igaz-e, hogy ez a várható értékek szorzata?

22. Folytonos egyenletes eloszlás feladatok

A folytonos egyenletes eloszlás definíciója az első ZH anyagában található.

1. (VIII/1) Egy szabályos háromszögbe kört rajzolunk, mely érinti a háromszög oldalait. A háromszög belsejében egyeneletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Mi a valószínűsége, hogy a pont a kör belsejébe esik?

2. **(VIII/3)** Mi a valószínűsége, hogy a (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) pontok által meghatározott négyzetben egyenletesen választott pont koordinátái közül

   a) az első koordináta legfeljebb kétszerese a másiknak?

   b) az első koordináta négyzete kisebb a második koordinátánál?

3. **(VIII/4)** Egy véletlen téglalapot úgy szerkesztünk meg, hogy mindkét oldalának hosszát egymástól függetlenül 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint választjuk. Mi a valószínűsége annak, hogy a téglalap kerülete nagyobb 2 hosszegységnél, és a területe kisebb $\frac{1}{4}$ területegységnél?

4. **(VIII/6)** *Buffon-féle tűprobléma:* Egy nagy papírlapra 4 cm-enként párhuzamos egyeneseket húzunk, majd egy 2 cm hosszú tűt magasról a papírra ejtünk. Mi a valószínűsége, hogy a tű metszi valamelyik egyenest?

5. **(VIII/18)** *Általános Buffon-féle tűprobléma:* Egy nagy papírlapra d cm-enként párhuzamos vonalakat húzunk, majd egy $2l$ cm hosszű tűt magasról a papírra ejtünk. Mi a valószínűsége, hogy a tű vonalra esik?

6. (VIII/8) 0 és 1 között két számot választunk egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint.

   a) Mi a valószínűsége annak, hogy a két szám különbségének abszolút értéke kisebb, mint a kisebbik szám?

   b) A két szám három darabra vágja a $[0, 1]$ intervallumot. Mi valószínűsége annak, hogy a három részintervallumból háromszöget lehet szerkeszteni?

7. (VIII/9) Egy egységnyi oldalú négyzet két átellenes oldalán egy-egy pontot választunk egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint. Mi a valószínűsége annak, hogy a két pont távolsága kisebb, mint x ($1 \leq x \leq \sqrt{2}$)?

8. (VIII/10) Mi a valószínűsége, hogy független, $(0, 1)$-en egyenletes eloszlás szerinti két véletlen szám közül az egyik n-edik gyöke kisebb a másik m-edik gyökénél, azaz $P(\sqrt[n]{RND_1} < \sqrt[m]{RND_2})$?

9. **(VIII/11)** Jancsi és Juliska 12 és 1 óra között szeretnének találkozni. Az egyszerűség kedvéért jelöljük a 12 órát 0-val, így mindkettőjük érkezése egy $(0, 1)$-beli szám. Tudjuk, hogy érkezésük egymástól független azonos eloszlású valószínűségi változó, ami egy $(0, 1)$-en egyenletes eloszlású szám négyzetgyökének eloszlásával egyezik meg. Mi a valószínűsége, hogy találkoznak, ha mindketten 20 percet ($1/3$ órát) várnak a másikra?

10. **(VIII/13)** Válasszunk k db pontot a (0,1) intervallumon egymástól függetlenül, egyenként egyenletes eloszlás szerint. Mi a valószínűsége, hogy az elhelyezkedésük szerint az j-edik kisebb x-nél?

11. **(VIII/15)*** A $(0, 1)$ intervallumban egyenletes eloszlás szerint választunk egy számot. Mi a valószínűsége, hogy olyan számot választunk, amelynek végtelen decimális kifejtése nem tartalmaz egyes számjegyet?

12. **(VIII/21)*** *Bertrand-paradoxon:* Egyezzünk meg abban, hogy a kör egy húrját "hosszúnak" nevezzük, ha a húrhoz tartozó középponti szög 120 foknál nagyobb, vagyis a húr hosszabb, mint a körbe rajzolható egyenlőoldalú háromszög oldalának a hossza. Egységsugarú kör esetén ez annyit jelent, hogy a húr hosszabb, mint $\sqrt{3}$ egység. Mi a valószínűsége annak, hogy a kör húrjai közül véletlenszerűen választva hosszú húr adódik, ha a véletlenszerű választás az alábbi módszerek egyikét jelenti?

    a) A kör egyik átmérőjét véletlenszerűen kiválasztjuk úgy, hogy az átmérő irányát kijelölő szög egyenletes eloszlású legyen 0 és 2π között, majd pedig a kiválasztott átmérőn egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Azt a húrt tekintjük, mely átmegy ezen a ponton, és merőleges az átmérőre.

    b) A kör kerületén egymástól függetlenül két pontot választunk egyenletes eloszlás szerint, és tekintjük a két pont által meghatározott húrt.

    c) A körlapon egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot, és tekintjük azt a húrt, aminek ez a pont a felezőpontja.

23. Feltételes eloszlás

1. Fontos az alábbi összefüggés:

$$P(c < Y < d|X = x) = \int_c^d f_{2|1}(y|x)dy = F_{2|1}(d|x) - F_{2|1}(c|x)$$

Feladatok:

2. **(VIII/22)** Legyen $f(x, y) = \frac{1}{x}$ ha $0 < y < x < 1$, egyébként 0. Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket:

    a) $P(Y \in (0.3, 0.4)|X = 0.5) =?$

    b) $P(Y \in (0.3, 0.4)|X = 0.8) =?$

    c) $P(Y \in (0.3, 0.4)|X = x) =?$

    d) $P(X \in (0.5, 0.7)|Y = 0.1) =?$

    e) $P(X \in (0.5, 0.7)|Y = 0.4) =?$

    f) $P(X \in (0.5, 0.7)|Y = y) =?$

3. **(VIII/23)** Legyenek X és Y független 2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

    a) $P(X + Y < 3) =?$

    b) $P(X + Y < z) =?$

    c) $P(X + Y < 3|X < 2) =?$

    d) $P(2 < X + Y < 3|Y > 1) =?$

24. Függetlenség

X, Y valószínűségi változók $f(x, y)$ közös sűrűségfüggvénnyel. X és Y pontosan akkor függetlenek, ha $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ alakban áll elő. Ezzel ekvivalens megfogalmazások az alábbiak:

$$f_{2|1}(y|x) = f_2(y) \quad \text{illetve} \quad f_{1|2}(x|y) = f_1(x) \quad \text{illetve} \quad \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B).$$

1. (VIII/24) Függetlenek-e az alábbi együttes sűrűségfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változók?

   a) $f(x, y) = \frac{1}{x}$ ha $0 < y < x < 1$
   b) $f(x, y) = 2$ ha $0 < y < x < 1$
   c) $f(x, y) = 1/2$ ha $0 < x < 1$ és $0 < y < 2$
   d) $f(x, y) = 2e^{x+2y}$ ha $0 < x$ és $0 < y$

2. **(VIII/25)** Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

   $$f(x, y) = 24xy \text{ , ha} \quad 0 < x, \quad 0 < y, \quad x + y < 1$$

   a) Független-e X és Y?
   b) $P(X < u, Y < v) =?$, ahol $u, v > 0$ és $u + v < 1$.

3. **(VIII/26)** Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

   $$f(x, y) = 1 \text{ , ha} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2(1 - x).$$

   a) $P(X < x, 1 < Y < \frac{3}{2}) =?$
   b) Független-e X és Y?

25. Kovariancia, korreláció (és szórás)

X és Y valószínűségi változó *kovarianciája* alatt az alábbi mennyiséget értjük:

$$cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Ez a mennyiség egyben fejezi ki azt, hogy mennyire mozognak X és Y a saját átlaguk körül, és hogy ez milyen mértékben törtönik ez egyszerre, egy irányba. A kovariancia kiszámítására gyakran használjuk az alábbi azonosságot:

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Egy hasznos felhasználása ennek a mennyiségnek, hogy függő valószínűségi változók összegének szórását is ki tudjuk számolni:

$$\sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_Y + \sigma^2_Y + 2cov(X, Y)$$

Másrészt az is látszik, hogy a kovariancia a szórásnégyzet (más szóval variancia) általánosítása:

$$cov(X,X) = \sigma_X^2$$

A fenti definícióból és a várható érték linearitásából következik, hogy:

- $cov(aX + b, Y) = a * cov(X, Y)$
- $cov(X + Y, Z) = cov(X, Z) + cov(Y, Z)$

A kovariancia önmagában nehezen használható két valószínűségi változó közti "hasnolóság" vizsgálatára, mert nagyban függ az egyes váltzók szórásától. Ezért a *korreláció* normálva van az egyes szórásokkal, így mindig egy -1 és 1 közti szám, amely ténylegesen az együtt mozgás mértékét fejezi ki:

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Feladatok

1. (IX/1) Ha $\mathbb{E}(X) = 1$ és $\mathbb{D}^2(X) = 5$, határozzuk meg

   a) $\mathbb{E}[(2 + X)^2]$,
   b) $\mathbb{D}^2(4 + 3X)$

   értékét.

2. (IX/2) Legyenek $X_1,\ X_2,\ \ldots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók μ várható értékkel és σ szórással. Határozzuk meg

   $$Y_n := \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} = \frac{\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

   várható értékét és szórását.

3. (IX/3) Egy kisváros négyzet alakú, mely négyzet oldalai 3 kilométer hosszúak. A város $(0,\ 0)$ középpontjában van a kórház, és a város utcái négyzetháló-szerűek. Ezért ha a város $(x,\ y)$ pontján történik egy baleset, a mentőnek $|x| + |y|$ távolságot kell megtennie a balesettől a kórházig. Ha egy baleset a városon belül egyenletes eloszlású helyen következik be, számoljuk ki a betegszállítás várható hosszát.

4. **(IX/4)** Legyenek X és Y független azonos eloszlású valószínűségi változók μ várható értékkel és σ szórással. Számoljuk ki $\mathbb{E}[(X - Y)^2]$ értékét.

5. **(IX/5)** A zsebemben levő 5, 10, 20, 50 és 100 forintos érmék száma független Poisson(λ) eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg aprópénzem értékének várható értékét és szórását.

6. (IX/6) X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,\,y) = \begin{cases} 60xy^2 & \text{, ha } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x, \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

   Határozzuk meg a kovarianciájukat.

7. (IX/7) X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,\,y) = \begin{cases} \frac{1}{x}2\mathrm{e}^{-2x} & \text{, ha } 0 < x < \infty,\ 0 \le y \le x, \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

   Határozzuk meg a kovarianciájukat.

8. **(IX/8)** X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,\,y) = \begin{cases} \frac{1}{y}\,\mathrm{e}^{-(y+x/y)} & \text{, ha} x > 0,\ y > 0, \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

   Határozzuk meg $\mathbb{E}(X)$ és $\mathbb{E}(Y)$ értékét, valamint mutassuk meg, hogy **Cov**$(X,\,Y) = 1$.

9. **(IX/9)** Legyen X az a szám, ahányszor 1-est látunk, Y az a szám, ahányszor 2-est látunk ha n-szer dobunk egy szabályos kockával. Számoljuk ki e két valószínűségi változó korrelációs együtthatóját.

10. **(IX/11)** Legyenek $X_1,\,X_2,\,\ldots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók μ várható értékkel és σ szórással, és legyen $Y_n = X_n + X_{n+1} + X_{n+2}$. Határozzuk meg **Cov**$(Y_n,\,Y_{n+j})$ értékét minden $j \ge 0$-ra.

11. (IX/12) Ha $X_1,\,X_2,\,X_3,\,X_4$ páronként korrelálatlan valószínűségi változók 0 várható értékkel és 1 szórással, számoljuk ki

    a) $X_1 + X_2$ és $X_2 + X_3$;
    b) $X_1 + X_2$ és $X_3 + X_4$

    korrelációs együtthatóját.

12. **(IX/14)*** Egy *gráf csúcsok*ból, és a csúcsokat összekötő *élek*ből áll. Tekintsünk egy gráfot, melynek n csúcsát 1-től n-ig megszámoztuk, és tegyük fel, hogy mind az $\binom{n}{2}$ csúcspár között egymástól függetlenül van él p valószínűséggel, és nincs él $1-p$ valószínűséggel. Az i csúcs D_i *fokszáma* az i csúcsból kiinduló élek száma.

    a) Mi a D_i véletlen szám eloszlása?
    b) Határozzuk meg a D_i és D_j változók $\varrho(D_i,\,D_j)$ korrelációs együtthatóját. (Tipp: definiáljuk X_i-t mint az i-ből induló, de nem j-be érkező élek számát, és I_{ij}-t mint az i és j közötti él meglétének indikátorát. Fejezzük ki D_i-t és D_j-t az $X_i,\ X_j$, és I_{ij} változókkal, ezután számoljunk korrelációt.)

13. **(IX/15)** Legyenek X és Y független valószínűségi változók közös μ várható értékkel, de különböző σ_X és σ_Y szórásokkal. μ értékét nem tudjuk, és egy mintavétel alapján az X és Y súlyozott átlagával szeretnénk becsülni. Azaz: μ értékére a $\lambda X + (1-\lambda)Y$ becslést fogjuk adni, valamilyen λ paraméterrel. Hogyan válasszuk λ-t, hogy a becslésünk szórása minimális legyen? Miért érdemes ezt a λ-t használnunk?

14. (IX/16) Ha $Y = aX + b$, mutassuk meg, hogy

$$\varrho(X, Y) = \begin{cases} +1 & \text{, ha } a > 0, \\ -1 & \text{, ha } a < 0. \end{cases}$$

15. (IX/17) Ha Z standard normális eloszlású, akkor mennyi $\mathbf{Cov}(Z, Z^2)$?

16. (IX/18) Legyen Z standard normális eloszlású, és $Y = a + bZ + cZ^2$. Mutassuk meg, hogy

$$\varrho(Y, Z) = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 2c^2}}.$$

17. **(IX/19)** Egy hibátlan érmével dobunk háromszor. Jelölje X illetve Y a dobott fejek illetve írások számát. Számoljuk ki a $Z := XY$ valószínűségi változó várható értékét és szórását.

26. Az u-próba (más néven: z-próba)

Legyenek mérési eredményeink: $X_1, X_2, \ldots X_n$ független, azonos *normális* eloszlású valószínűségi változók a közös $\mu = \mathbb{E}(X_k)$ várható értékkel és $\sigma = \mathbb{D}(X_k)$ szórással. Vegyük a mérési eredményeink számtani átlagát: $\overline{X}_n := (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$. Ekkor

$$\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \mu, \qquad \mathbb{D}(\overline{X}_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad \text{és legyen} \qquad Z := \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

A fentiekből következik, hogy Z standard normális eloszlású valószínűségi változó.

(a) Becslés. A statisztika egyik alapfeladata *becslést, konfidencia intervallumot* adni mérési eredmények eloszlásának egy ismeretlen paraméterére. Legyen a μ várható érték ismeretlen és a σ szórás ismert. A mérési eredményeink alapján adjunk meg olyan intervallumot, amely $1 - \alpha$ valószínűséggel (pl. $\alpha = 0.05$) tartalmazza a μ paramétert. Jelölje $z_{\alpha/2}$ a standard normális eloszlás táblázatából visszakeresett azon számot, aminél nagyobb értéket Z csak $\alpha/2$ valószínűséggel vesz fel. Ekkor a fentiek szerint $\mathbb{P}(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$, és így a keresett (véletlen!) konfidencia intervallum

$$\left(\overline{X}_n - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right).$$

(b) Hipotézis vizsgálat. A statisztika másik alapfeladata mérési eredmények eloszlásának egy ismeretlen paraméterére vonatkozó hipotézisek vizsgálata. Legyen megint a μ várható érték ismeretlen és a σ szórás ismert. A mérési eredményeink alapján adott α *szignifikancia-szint* esetén (pl. $\alpha = 0.05$) döntsük el azt a hipotézist (feltevést), hogy az ismeretlen paraméter értéke egy adott μ_0 szám. A szignificancia-szint arra utal, hogy abban az esetben, ha az ismeretlen paraméter értéke tényleg μ_0, csak α (kis) valószínűséggel forduljon elő az az *elsőfajú hiba*, hogy a mérési eredmények megcáfolni látszanak a hipotézisünket.

Fontos megérteni, hogy a statisztikában tipikusan nincs abszolút bizonyosság. Pozitív valószínűséggel döntésünk hibás lesz. Tipikusan *másodfajú hibát* is pozitív valószínűséggel követhetünk el: elfogadjuk a hipotézist olyankor, amikor $\mu \neq \mu_0$.

A döntésünket adott μ_0 esetén az

$$U := \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

véletlen mennyiségre alapozzuk. A fentiek szerint, ha $\mu = \mu_0$, akkor $\mathbb{P}(-z_{\alpha/2} < U < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$. Így akkor és csak akkor fogadjuk el a $\mu = \mu_0$ hipotézist, ha a mérési eredményeinkből számított U értékre fennáll, hogy $|U| < z_{\alpha/2}$, másképpen:

$$\mu_0 - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X}_n < \mu_0 + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

egyébként a hipotézist elvetjük. Az itt szereplő alsó és felső korlátokat $\overline{X}_n$-re *kritikus értékeknek* is nevezzük.

A másodfajú hiba valószínűségét az *erőfüggvény* mutatja meg. Mivel U várható értéke $(\mu - \mu_0)/\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ és szórása 1, ezért az ismeretlen μ paraméter függvényében az erőfüggvény

$$f(\mu) := \mathbb{P}(|U| < z_{\alpha/2}) = \Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right).$$

Ha a hipotézis fennáll, azaz $\mu = \mu_0$, akkor $f(\mu_0) = 1 - \alpha$ (pl. 0.95), nagy valószínűséggel elfogadjuk a hipotézist. Ahogy μ távolodik μ_0-tól, ez a valószínűség folytonosan, haranggörbe alakban csökken le zérushoz közeli értékekre.

Megjegyezzük, hogy mind a konfidencia intervallum, mind a hipotézis vizsgálat könnyen kiterjeszthető *egyoldalú* esetre is, amikor pl. csak véges felső korlátot akarunk mondani az ismeretlen μ paraméterre, az alsó "korlát" $-\infty$. Ez esetben z_α-t kell kiszámolni úgy hogy $\mathbb{P}(Z < z_\alpha) = 1 - \alpha$ legyen. A konfidencia intervallum képlete az alábbiak szerint alakul:

$$\left(-\infty, \overline{X}_n + z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

a teszt pedig:

$$\overline{X}_n < \mu_0 + z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

esetén fogadja el a hipotézist (figyeljünk arra, hogy a feladatban alsó, vagy felső határt kérdeznek).

(c) Kétmintás eset. Legyen most két sorozat mérési eredményünk: az $X_1, X_2, \dots X_n$ független, azonos *normális* eloszlású valószínűségi változók a közös $\mu_1 = \mathbb{E}(X_k)$ várható értékkel és $\sigma_1 = \mathbb{D}(X_k)$ szórással, illetve az $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ független, azonos *normális* eloszlású valószínűségi változók a közös $\mu_2 = \mathbb{E}(Y_k)$ várható értékkel és $\sigma_2 = \mathbb{D}(Y_k)$ szórással. Vegyük a mérési eredményeink számtani átlagait: $\overline{X}_n := (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$ és $\overline{Y}_m := (Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_m)/m$.

Egy alapvető statisztikai feladat annak a hipotézisnek a vizsgálata, hogy a két ismeretlen várható érték megegyezik-e, vagyis fennáll-e $\mu_1 = \mu_2$? Ennek eldöntéséhez vegyük a két számtani átlag különbségét, az $\overline{X}_n - \overline{Y}_m$ véletlen mennyiséget. E mennyiség várható értéke $\Delta\mu := \mu_1 - \mu_2$, szórása $\sigma_0 := \sqrt{\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m}$.

Tegyük fel, hogy a $\Delta\mu$ paraméter ismeretlen, a σ_1 és σ_2 szórások ismertek. A korábbiakhoz hasonlóan vegyük az alábbi véletlen U mennyiséget:

$$U := \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m}{\sigma_0} = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}}.$$

Ekkor U várható értéke $\Delta\mu/\sigma_0$ és szórása 1. Ezért a $\mu_1 = \mu_2$ (azaz $\Delta\mu = 0$) hipotézist akkor és csak akkor fogadjuk el adott α szignifikancia-szint esetén, ha $|U| < z_{\alpha/2}$, egyébként elvetjük. Az

$$f(\Delta\mu) := \mathbb{P}(|U| < z_{\alpha/2}) = \Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{\Delta\mu}{\sigma_0}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\Delta\mu}{\sigma_0}\right)$$

erőfüggvény (azaz a hipotézis elfogadásának valószínűsége) a hipotézis teljesülése esetén $1 - \alpha$ (nagy) és folytonosan, haranggörbe szerint csökken zérushoz közeli értékekre, amint a $|\Delta\mu|$ különbség nő.

Feladatok:

Az u-próbához megadott feladatokban szereplő valószínűségi változókat vegye normális eloszlásúaknak!

1. **(X/1) (kétoldali teszt)** Egy deszkagyárban ellenőrizni szeretnénk, hogy a gyártott deszkák hosszának várható értéke megegyezik-e a szükséges 180 cm-rel. A hossz szórása 10 cm. Azt szeretnénk, hogy ha megegyezik, akkor legalább 0.85 valószínűséggel fogadja el ezt a hipotézist a próba, és ha a deszkák várható értéke 165 cm alatt vagy 195 cm felett van, akkor legalább 0.8 valószínűséggel a próba vesse el a 180 cm-es hipotézist. Válassza meg a kritikus értékeket és a szükséges mintaelemszámot (azaz a megmérendő deszkák számát)!

2. **(X/2) (egyoldali teszt)** Egy deszkagyárban ellenőrizni szeretnénk, hogy a gyártott deszkák hosszának várható értéke eléri-e a minimális 180 cm-t. A hossz szórása 10 cm. Azt szeretnénk, hogy ha eléri, akkor legalább 0.85 valószínűséggel fogadja el ezt a hipotézist a próba, és ha a deszkák várható értéke 165 cm alatt van, akkor legalább 0.8 valószínűséggel a próba vesse el a $\geq$ 180 cm-es hipotézist. Válassza meg a kritikus értéket és a szükséges mintaelemszámot!

3. **(X/3) (konfidencia intervallum)** Öt hallgató egy laborban a következő mérési eredményeket kapta elvileg ugyanarra az áramerősségre egy kissé lestrapált ampermérővel: 15.2, 15.7, 14.6, 16.8, 13.9 A. A mérés szórása 2 A. Adjon meg olyan konfidencia intervallumot, amely az áramerősség várható értékét a) 0.8 b) 0.9 c) 0.99 valószínűséggel tartalmazza! Hány kísérlettel lehetne 1.2 A hosszúságú 95%-os konfidencia intervallumot megadni?

4. **(X/4) (kétmintás eset)** Egy tudományos kutató azt állítja, hogy a norvég és a svéd felnőtt férfiak átlagos testmagassága megegyezik. A hipotézis ellenőrzéséhez megmérték 10 norvég és 15 svéd férfi testmagasságát. Előbbiek átlaga 187 cm, utóbbiaké 185,5 cm. Azt szeretnénk, hogy a hipotézis fennállása esetén a helyes döntés valószínűsége legyen 0.95. Adja meg a döntést, ha a testmagasságok szórása a két országban a) 5 cm és 4 cm b) 0.5 cm és 0.4 cm!

27. Határérték tételek

A határérték tételek azt mondják ki, hogy kellően sok független azonos eloszlású (fae.) valószínűségi változó összegének - vagy más néven *konvolúciójának* - eloszlása, jól közelíthető a megfelelő szórású és várható értékű normális eloszlással.

Az első felfedezés, mely ez irányba mutatott a *Moivre-Laplace tétel*, amely ezen állítást indikátor változók *konvolúciójára* mondja ki (indikátor változók összege a binomiális eloszlás):

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \sim X(k),$$

ahol $X \sim N(m, \sigma)$ normális eloszlású valószínűségi változó, $m = np$ és $\sigma = \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}$ -val.

- Vegyük észre, hogy a várhatóérték és szórás nem lehet más, csak az n-ed rendű binomiális eloszlás várható értéke és szórása (máskülönben biztosan rossz közelítést kapnánk).
- Ennek a tételnek egy hasznos következménye, hogy:

$$\sum_{k=a}^{b}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \approx \sum_{k=a}^{b} X(k) \approx \Phi(\frac{b-m}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-m}{\sigma})$$

A *centrális határelszlás tétel* hasonló állítást mond ki, de nem csak indikátor változókra, hanem fae. valószínűségi változók széles körére.

A tétel alkalmazása az előzőekhez hasonlóan történik. n db fae. valószínűségi változó összegének eloszlását, a megfelelő várható értékű és szórású normális eloszlással közelítjük.

Feladatok

1. (X/5) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 12 000 kockadobás során előforduló hatosok száma 1900 és 2150 közé esik?
2. (X/6) Egy gyár adott típusú termékei egymástól függetlenül elfogadható minőségűek 0.95 valószínűséggel. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy a következő 150 termékből legfeljebb 10 nem lesz elfogadható.
3. **(X/7)** Egy gyár két fajta érmét gyárt: egy igazságosat, és egy hamisat ami 55% eséllyel mutat fejet. Van egy ilyen érménk, de nem tudjuk igazságos-e vagy pedig hamis. Ennek eldöntésére a következő statisztikai tesztet hajtjuk végre: Feldobjuk az érmét 1000-szer. Ha legalább 525-ször fejet mutat, akkor hamisnak nyilvánítjuk, ha 525-nél kevesebb fej lesz a dobások között, akkor az érmét igazságosnak tekintjük. Mi a valószínűsége, hogy a tesztünk téved abban az esetben, ha az érme igazságos volt? És ha hamis volt?
4. (X/8) (Konfidencia intervallum) Határozzuk meg azt a k egész számot, amelyre igaz, hogy annak a valószínűsége, hogy 1000 érmedobás során a fejek száma $500 - k$ és $500 + k$ közé esik, kb. 0.9.
5. **(X/9)** (Statisztikai hipotézis vizsgálat) Egy érmét 1000-szer feldobtunk és 570 fejet kaptunk. Ennek alapján feltehető-e, hogy az érme hamis? (Útmutatás: Igazságos érme esetén mekkora valószínűséggel kapnánk 570 vagy több fejet?)
6. **(X/10)** Hányszor kell egy érmével dobnunk ahhoz, hogy 0.99-nél nagyobb valószínűséggel a fej eredmények száma a dobások számának 49%-a és 51%-a közé essen?

7. **(X/11)** Dömötör rulettezik a kaszinóban. Minden egyes körben 10 petákot tesz 'piros'-ra. 100 játék után 300 peták a vesztesége. Jogos-e a gyanúja, hogy svindlizik a krupié? (A rulett-körön összesen 37 mező van 0-tól 36-ig számozva. Ezek közül egy (a 0 jelű) zöld, a fennmaradó 36-ból pedig 18 piros és 18 fekete.)

8. (X/12) Egy szabályos érmét 40-szer feldobunk, és X-szel jelöljük a kapott fejek számát. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy $X = 20$

   - a binomiális eloszlás segítségével,
   - a deMoivre–Laplace-tételt használva. Ez utóbbihoz segítség: $\mathbb{P}\{X = 20\} = \mathbb{P}\{19.5 \leq X < 20.5\}$, ami persze nem számít amíg X-et binomiálisnak (azaz egész értékűnek) tekintjük, de fontos lesz a deMoivre–Laplace-tétel alkalmazásánál.

9. (X/13) Írjuk fel az n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlás standardizáltjának eloszlásfüggvényét $n \to \infty$ esetén a $p = 0.5$, $p = 0.02$ illetve $p = 0.96$ esetekben. Továbbá hasonlítsuk össze a $b(k; n, p)$ binomiális valószínűségek pontos értékét a deMoivre–Laplace-tételből kapott közelítésükkel, ha mondjuk $n = 30$ és $k =$módusz.

10. **(X/14)** Egy nagyváros lakosságának *általunk ismeretlen* p hányada dohányzik. Ezt a p hányadot akarjuk közelítőleg meghatározni egy mintában megfigyelt relatív gyakorisággal, a következő módon: megkérdezünk n véletlenszerűen kiválasztott lakost és megállapítjuk, hogy ezek között k állítja, hogy dohányzik. A nagy számok törvényéből tudjuk, hogy ha n elég nagy, akkor az empirikusan megfigyelt $p' := k/n$ relatív gyakoriság igen nagy valószínűséggel jól közelíti a az igazi p hányadot. Milyen nagynak kell n-et választanunk, ha azt akarjuk elérni, hogy az empirikusan megfigyelt p' relatív gyakoriság legalább 0.95 valószínűséggel 0.005 hibahatáron belül közelítse a valódi (ismeretlen) p hányadot? Másszóval: határozzuk meg azt a legkisebb n_0 természetes számot, melyre igaz, hogy hogy bármely $p \in (0,\, 1)$-re és $n \geq n_0$-ra

$$\mathbb{P}\{|p' - p| \leq 0.005\} \geq 0.95.$$

11. **(X/15)** Mennyi a valószínűsége annak, hogy 50 darab független és azonos eloszlású valószínűségi változó összege a $[0,\, 30]$ intervallumba esik, ha egy ilyen változó eloszlása a $[0,\, 1]$ intervallumon

    a) egyenletes;

    b) $f(x) = 2x$ sűrűségfüggvény szerint alakul?

12. **(X/16)*** A pszichológia kurzusra beiratkozó diákok száma Poisson eloszlású, 100 várható értékkel. Annak valószínűsége, hogy legalább 120 diák veszi fel a pszichológiát

$$\mathbb{P}\{X \geq 120\} = \mathrm{e}^{-100} \sum_{i=120}^{\infty} \frac{(100)^i}{i!},$$

egy meglehetősen kellemetlen formula. Becsüljük meg ezt a valószínűséget a centrális határeloszlás tétel segítségével, felhasználva, hogy 100 darab, egymástól független 1 várható értékű Poisson valószínűségi változó összege épp egy 100 várható értékű Poisson eloszlású változó.

13. (X/17) Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 10 000 kockadobás összege 34 800 és 35 200 közé esik.

14. **(X/18)** Egy kockát folyamatosan feldobunk addig, amíg a dobások összege meghaladja a 300-at. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy legalább 80 dobásra van ehhez szükség.

15. (X/19) Adott 100 égőnk, melyek élettartama egymástól független exponenciális eloszlású, 5 óra várható értékkel. Tegyük fel, hogy az égőket egymás után használjuk, azonnal kicserélve azt, amelyik kiégett. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 525 óra után még van működő égőnk.

16. **(X/20)** Az 15. feladatban most tegyük fel, hogy minden égő kicserélése független, a $(0,\ 0.5)$ intervallumon egyenletes eloszlású ideig tart. Becsüljük meg most annak valószínűségét, hogy 550 óra elteltével már az összes égő kiégett.

17. **(X/21)** A jegyiroda előtt a fiatalok hosszú sorban állnak egy koncertjegyért. Ebben a pillanatban éppen 18-an állnak az egyik pénztár előtt. Megfigyeltem, hogy egy vásárló kiszolgálási ideje memória nélküli valószínűségi változó 3 perc átlaggal és a kiszolgálási idők függetlenek. Becsülje meg annak a valószínűségét, hogy a most utolsóként álló fiatal több mint 60 percet fog a pénztár előtt eltölteni!

18. **(X/22)** Egy teherautóra 30 ládát pakolnak fel. Az egyes ládák tömegéről csak annyit tudunk, hogy 10 és 20 kg között egyenletes eloszlásúak, egymástól függetlenül. Mennyi az össztömeg várható értéke és szórása? Mi a valószínűsége, hogy a teljes tömeg nem haladja meg a 470 kg-ot? Maximum hány ládát lehet a teherautóra pakolni, hogy 0.99 valószínűséggel az össztömeg ne haladja meg az 500 kg-os maximális engedélyezett össztömeget?

28. Folytonos valószínűségi változók transzformációi

Az $y = a + bx$ egy *lineáris* transzformáció. Ha $Y = a + bX$ és X sűrűségfüggvénye $f(x)$, eloszlásfüggvénye $F(x)$, Y sűrűségfüggvénye $g(y)$, eloszlásfüggvénye $G(y)$, akkor:

$$G(y) = \begin{cases} F(\frac{y-a}{b}) & \text{ha } b > 0, \\ 1 - F(\frac{y-a}{b}) & \text{ha } b < 0; \end{cases} \qquad g(y) = \frac{1}{|b|} f(\frac{y-a}{b}).$$

- Általánosabb eset: legyen $Y = t(X)$. Ha a t függvény monoton növekvő, és t^{-1} folytonosan differenciálható, akkor

$$G(y) = F(t^{-1}(y)), \qquad g(y) = f(t^{-1}(y)) \left[t^{-1}(y)\right]'.$$

hiszen:

$$G_Y(y) = P(Y < y) = P(t(X) < y) = P(X < t^{-1}(y)) = F_X(t^{-1}(y)).$$

A sűrűségfüggvényt ennek deriválásával kapjuk. (Figyeljünk rá, hogy a transzformációtól függően esetsétválasztásra lehet szükség, mint a fennt szereplő $g(y) = \frac{1}{|b|} f(\frac{y-a}{b})$-nél is az abszoult érték a két lehetőség külön deriválásából következik.)

- Még általánosabb képlet, ha t monoton növő és monoton csökkenő darabokból áll:

$$g(y) = g_1(y) + g_2(y) + \cdots + g_i(y),$$

ahol $g_j(y)$ a t függvény j-edik darabjából adódó sűrűségfüggvény.

- Egy fontos dolog: ha $F(x)$ egy tetszőleges eloszlásfüggvény, akkor az $F^{-1}(RND)$ valószínűségi változó $F(x)$ eloszlású. Ezt felhasználva generálhatunk tetszőleges eloszlású valószínűségi változót!

Feladatok:

1. (XI/1) Vegyük azt az X folytonos eloszlást, amelynek a sűrűségfüggvénye $f(x) = 2x$ ha $x \in [0, 1]$, egyébként 0.

   a) Mi lesz az $Y = 3 + 5X$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye? Hogyan változott a várható érték?

   b) Lineáris transzformáció segítségével standardizáljuk X eloszlását, azaz találjunk egy olyan $t(x) = a + bx$ függvényt, hogy $t(X) = a + bX$ valószínűségi változó 0 várható értékű, és 1 szórású legyen.

2. (XI/2) Van egy 25 óra várható értékű exponenciális eloszlás szerint kiégő égőnk. A barátommal a következő játékot játszuk: fizetek neki $25^2 = 625$ forintot, és ha kiég az égő, akkor ő kifizeti nekem az égő órákban mért élettartalmának négyzetét. Kinek előnyös a játék? Számoljuk ki a barátom által fizetett pénz eloszlását!

3. **(XI/3)** Legyen X valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon. Határozzuk meg $x^{1/2}$, x^2, $x^{-1/2}$, x^{-1}, x^{-2} eloszlását. Hogyan változik a várható érték és szórás?

4. (XI/4) Egy villanykörte-gyár λ paraméterű exponenciális eloszlás szerint kiégő villanykörtét gyárt. A konkurens cég is tud λ paraméterű exponenciális szerint kiégőt gyártani, ezért hosszú kutatás után bevezetnek egy új eljárást, amely segítségével megháromszorozták az izzók várható élettartalmát. Milyen lett így az új izzók élettartalmának eloszlása? Hogyan tudnánk ilyen eloszlást gyártani a már meglévő eloszlásból?

5. **(XI/5)** Legyen X 2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Mi lesz X^k eloszlása? Mi lesz az új várható érték, és az új szórás?

6. **(XI/6) (a transzfomáció monoton szakaszain külön számolandó)** Legyen X egyenletes eloszlású az $[5, 8]$ intervallumon.

   a) Számoljuk ki $|X - 6|$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

   b) Számoljuk ki X^2 eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

7. (XI/7) Legyen X egy 1 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg $Y = \ln(X)$ sűrűségfüggvényét.

8. **(XI/8)** Határozzuk meg $R = A\sin(\Theta)$ eloszlását, ahol A egy rögzített konstans, és Θ egyenletes eloszlású valószínűségi változó $(-\pi/2, \pi/2)$-n. (Az R-hez hasonló valószínűségi változók ballisztikánál jönnek elő: a v sebességgel α szögben kilőtt lövedék $R = \frac{v^2}{g} \cdot \sin(2\alpha)$ távolságban ér földet.)

9. (XI/9) Legyen X egyenletes eloszlású az $(\alpha,\ \beta)$ intervallumon. Mi lesz $Z = aX + b$ eloszlása?

10. (XI/10) Legyen X normális eloszlású μ várható értékkel és σ szórással. Mi lesz $Z := aX + b$ eloszlása? (Tipp: határozzuk meg és csodálkozzunk rá Z nevezetes sűrűségfüggvényére.)

11. **(XI/11)*** Legyen X normális eloszlású μ várható értékkel és σ szórással. Határozzuk meg $Y = \mathrm{e}^X$ sűrűségfüggvényét. (Y *eloszlását lognormálisnak nevezik.*) Mutassuk meg, lehetőleg számolás nélkül, hogy CY^α eloszlása szintén lognormális $\mu' = \alpha\mu + \log C$ és $\sigma'^2 = \alpha^2\sigma^2$ paraméterekkel. (Tipp: tudjuk, hogy $Y = \mathrm{e}^X$, ahol X normális. Írjuk fel CY^α-t e^Z alakban, találjuk meg a kapcsolatot X és Z között, és használjuk az előző feladat eredményét.)