A Wallis-formula

Markó Zoltán

2009. július 2.

Olyan formulát vezetünk le, amely a π egy közelítését adja. Először vizsgáljuk az $f(\sin x)$, $f(\cos x)$ típusú függvények integrálját a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon.

A $\frac{\pi}{2} - x = y$ helyettesítést alkalmazva:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x \overset{\frac{\pi}{2}-x=y}{=} -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right)\,\mathrm{d}y.$$

Felhasználva, hogy $\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos y$, valamint az integrációs határokat felcserélve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos y)\,\mathrm{d}y$$

adódik.

A következőkben használni fogjuk a következő jelölést: $n!! := n(n-2)(n-4)\cdots 2$ vagy 1, n paritásától függően, a kifejezést n *szemifaktoriálisának* nevezzük.

1. Tétel (Wallis-formula). $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}.$

Bizonyítás: A tétel előtti meggondolások szerint

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x.$$

Integráljunk parciálisan a következő módon:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^{n-1} x}_{u}\underbrace{\sin x}_{v'}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\left[-\cos^2 x \sin^{n-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\,\mathrm{d}x =$$

$$(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x.$$

Így a következő rekurziós formulát kapjuk:

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Azaz $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} = \ldots$.

Ha $n = 2k$, akkor $I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} I_0$, $I_0 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$,

ha $n = 2k+1$, akkor $I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} I_1$, $I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, \mathrm{d}x = 1$.

Ha most $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, akkor

$$\sin^{2n+2} x \leq \sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x,$$

az integrál linearitása miatt:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} x \, \mathrm{d}x \leq \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, \mathrm{d}x \leq \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, \mathrm{d}x.$$

Akkor a rekurziós formulák szerint az egyenlőtlenség-rendszer a következő alakban írható:

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+2)!!} \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n)!!^2}{(2n+1)!!^2} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)!!} \frac{\pi}{2}.$$

Mivel $\frac{(2n)!!}{(2n+2)!!} = \frac{1}{2n+2}$ és $\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)!!} = \frac{1}{2n+1}$, ezért

$$\frac{2n+1}{2n+2} \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n)!!^2}{(2n-1)!!^2 (2n+1)} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2n+2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \leq \frac{(2n)!!}{(2n-1)!! \sqrt{2n+1}} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Ha most $n \to \infty$, akkor a rendőr-elv értelmében éppen a bizonyítandó állítás adódik. $\square$