Ortogonális transzformációk mátrixai

2009. április 26.

Háromdimenziós euklideszi tér origót helyben hagyó izometriáinak mátrixai a következők:

1. Adott $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ egységnyi irányvektorú egyenesre való merőleges vetítés:

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix} \mathbf{r}.$$

2. Adott $\mathbf{v}$ egységnyi irányvektorú egyenesre való tükrözés:

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} 2a^2 - 1 & 2ab & 2ac \\ 2ab & 2b^2 - 1 & 2bc \\ 2ac & 2bc & 2c^2 - 1 \end{bmatrix} \mathbf{r}.$$

3. Adott $\mathbf{v}$ egységnyi normálvektorú síkra vetítés:

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} 1 - a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1 - b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1 - c^2 \end{bmatrix} \mathbf{r}.$$

4. Adott $\mathbf{v}$ egységnyi normálvektorú síkra tükrözés:

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1 - 2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1 - 2c^2 \end{bmatrix} \mathbf{r}.$$

5. z-tengely körüli φ szögű forgatás:

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{r}.$$

6. $\mathbf{v}$ vektorral való vektoriális szorzás:

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \mathbf{r} = \mathbf{C}_{\mathbf{v}} \mathbf{r}.$$

7. $\mathbf{v}$ irányvektorú egyenes körüli φ szögű forgatás:

$$\mathbf{r}' = \big(\mathbf{E} + \mathbf{C}_\mathbf{v} \sin\varphi + \mathbf{C}_\mathbf{v}^2 (1 - \cos\varphi)\big)\,\mathbf{r}.$$

8. $\mathbf{v}$ irányvektorú egyenesre vett φ szögű forgatva türközés:

$$\mathbf{r}' = \big(-\mathbf{E} + \mathbf{C}_\mathbf{v} \sin\varphi - \mathbf{C}_\mathbf{v}^2 (1 + \cos\varphi)\big)\,\mathbf{r}.$$

Affin transzformációk:

Az affin transzformációkat homogén koordináták bevezetésével írhatjuk le, mint egyszerű mátrixszorzást. Ha $\mathbf{f}$ vektor a transzformáció tetszőleges fixpontja, és a transzformáció lineáris részét az A mátrix írja le, akkor az eltolási rész: $\mathbf{a} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{f}$, és akkor a transzformáció homogén koordinátákban felírva:

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{a} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \mathbf{r}.$$