TDK 2010

Müntz-típusú tételek súlyozott $L^2(0,\infty)$ terekben multiplicitással

Markó Zoltán, matematika BSc III. évfolyam

Konzulens: G. Horváth Ágota, BME Analízis Tanszék

Müntz-típusú tételek súlyozott $L^2(0,\infty)$ terekben multiplicitással

2010. október 28.

1. Bevezetés, definíciók

A matematikában (sokszor fizikai motivációval) fontos lehet bizonyos függvények közelítése olyanokkal, melyek „szebb" tulajdonságokkal rendelkezek (pl. végtelen sokszor differenciálhatóak, stb.). Az ilyen közelítésekkel az *approximációelmélet* foglalkozik. Először is meg kell határoznunk, hogy mely függvénytér elemeit szeretnénk közelíteni, és hogy mely függvényosztály elemeivel tesszük mindezt. *Közelség* alatt azt értjük, hogy ha adott X függvénytér (mely teljes normált tér, vagyis Banach-tér), és annak egy f közelítendő eleme, valamint $S \subset X$ altér, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $f_\varepsilon \in S$, hogy az X-en definiált normában

$$\|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

Lényegében ez annak felel meg, hogy a függvénytér adott f eleméhez van olyan eleme S-nek, mely f-hez tetszőlegesen közel van. Tetszőleges $f \in X$-et tehát akkor lehet approximálni S-beli elemekkel, ha ilyen f_ε minden f-re és minden ε-ra létezik. Ez éppen azt jelenti, hogy S altér sűrű X-ben.

Az approximációelmélet egyik legfontosabb alapfeladata tehát annak megállapítása, hogy egy altér sűrű-e egy adott függvénytérben. Közismert az első ilyen tétel, amely Weierstrass nevéhez kötődik: approximációs tétele szerint a polinomok sűrű alteret alkotnak $C[0,1]$-en a szokásos szuprémumnormával. Weierstrass tehát a $\operatorname{span}\{t^k \mid k = 0, 1, \ldots\}$ rendszer sűrűségére igazolt tételt.

Bernstein 1912-ben közzétett [3] cikkében a $\operatorname{span}\{t^{a_k} \mid k = 0, 1, \ldots\}$ rendszer sűrűségét vizsgálta $C[0,1]$-en, ahol $0 = a_0 < a_1 < \ldots$ növekvő pozitív sorozat, és megfogalmazott egy sejtést, melyet Ch. H. Müntz [18] 1914-ben bizonyított. Müntz tétele a következő volt:

A. Tétel (Müntz). *Legyen $0 = a_0 < a_1 < \ldots$, valós számok növekvő sorozata. Ekkor* $\operatorname{span}\{t^{a_k} \mid k = 0, 1, \ldots\}$ *pontosan akkor sűrű $C[0,1]$-en, ha*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k} = \infty.$$

Ezután több bizonyítás és általánosítás is született a témakörben (ld. pl. J. M. Almira [1]). $C[0,1]$-en és $L^p(0,1)$-en is igazoltak Müntz-típusú tételeket (pl. P. Borwein, T.

Erdélyi [6], T. Erdélyi, W. B. Johnson [8]). Müntz tétele óta a véges sok $\{t^{a_k}\}$ lineáris kombinációjaként felírható függvényeket Müntz-polinomoknak nevezzük. Ezen függvényekkel kapcsolatban is több cikk íródott (pl. 2009-ben Ú. F. Stefánsson [20]).

Végtelen intervallumon a teret súlyoznunk kell, hogy véges legyen a norma. A továbbiakban a $(0, \infty)$ intervallumon tekintünk Müntz-típusú tételeket. A 40-es években több cikk is íródott a $\{t^{a_k}e^{-t}\}$ rendszerrel kapcsolatban, span $\{e^{-t}t^{a_k}\}$ sűrűségére mondott ki tételt pl. W. H. J. Fuchs [9] illetve R. P. Boas és H. Pollard [5]. Fuchs a következőt igazolta:

B. Tétel (Fuchs). *Legyenek $a_0 < a_1 < \ldots$ olyan pozitív számok, melyekre $a_{k+1} - a_k > c > 0$ teljesül valamely c valós számra. Legyen továbbá*

$$\Psi(r) = \begin{cases} \frac{2}{a_1}, & \text{ha } r < a_1; \\ \sum_{a_k \le r} \frac{2}{a_k}, & \text{ha } a_1 \le r. \end{cases}$$

Ekkor az $\{e^{-t}t^{a_k}\}$ rendszer pontosan akkor teljes $L_2(0, \infty)$-en, ha

$$\int_1^\infty \frac{\Psi(r)}{r^2}\,\mathrm{d}r = \infty.$$

Felmerült a kérdés azonban, mi a helyzet általános súlyfüggvényekkel (előbbi esetben a súlyfüggvény $w(t) = e^{-t}$). A. F. Leontev [16] és G.V. Badalyan [2] hasonló tételeket igazoltak, általánosabb súlyfüggvényekkel. Súlyozott $C(0, \infty)$ téren igazolt Müntz-típusú tételt pl. P. Malliavin [17]:

C. Tétel (Malliavin). *Legyen $W(t)$ valós értékű folytonos függvény $[0, \infty)$-en, és tegyük fel, hogy $\ln |W(e^t)|$ konvex függvény. Ha C_W jelöli azon komplex értékű, $[0, \infty)$ intervallumon értelmezett függvények terét, melyekre $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{W(t)} = 0$, akkor C_W az $\|f\|_W = \sup\left\{\left|\frac{f(t)}{W(t)}\right| \mid t \in [0, \infty)\right\}$ normával Banach-tér. Ha $\{a_n\}$ pozitív növekvő sorozat, melyre $\liminf_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) > 0$ teljesül, akkor a $\{t^{a_k}\}$ rendszer pontosan akkor nem teljes C_W-ben, ha létezik $\eta \in \mathbb{R}$, hogy*

$$\int_1^\infty \frac{\ln |W(e^{\Psi(r)-\eta})|}{r^2}\,\mathrm{d}r < \infty,$$

ahol

$$\Psi(r) = \begin{cases} 0, & \text{ha } r < a_1; \\ \sum_{a_k \le r} \frac{2}{a_k}, & \text{ha } a_1 \le r. \end{cases}$$

Malliavin cikke a témakör alapja, több későbbi általánosítás is használja az eszközeit (pl. G. T. Deng [7], B. V. Vinnitskii, A. V. Shapovaloskii [22]), illetve ezzel kapcsolatos eredményt bizonyított Kroó András és Szabados József [15]. Születtek tételek több dimenziós esetben, (pl. Kroó András [14]), valamint komplex kitevőkre is (pl. L. Knockaert [13]).

A dolgozatban $w(t)$ súlyfüggvénnyel súlyozott $L^2(0,\infty)$ terekben igazolunk Müntz-típusú tételeket. Súlyozott $L^2(0,\infty)$ tér alatt értjük a következő valós értékű függvények terét:

$$L^2_w(0,\infty) := \{f \mid fw \in L^2(0,\infty)\},$$

a normát pedig

$$\|f\|_{2,w} := \|fw\|_{2,(0,\infty)} = \left(\int_0^\infty f^2(t) w^2(t) \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}}$$

alakban definiáljuk. Ezzel a jelöléssel a B. tétel Müntz-típusú tétel az $L^w_2(0,\infty)$ téren, ahol $w(t) = e^{-t}$.

$L^2_w(0,\infty)$ Hilbert-tér, a skalárszorzás a következőképpen értelmezhető: ha $f, g \in L^2_w(0,\infty)$, akkor

$$\langle f, g\rangle_{2,w} := \langle fw, gw\rangle_2 = \int_0^\infty f(t)g(t)w^2(t) \, \mathrm{d}t.$$

Természetesen teljesül, hogy ha $f \in L^2_w(0,\infty)$, akkor $\sqrt{\langle f, f\rangle_{2,w}} = \|f\|_{2,w}$. Amennyiben $w(t) \equiv 1$, a szokásos $L^2(0,\infty)$ függvényteret kapjuk vissza.

A szokásoknak megfelelően $\{h_n\} \subset B$ rendszer esetén $\operatorname{span}\{h_n\}$ jelöli a h_n által kifeszített lineáris alteret B-ben.

Ebben a dolgozatban súlyfüggvénynek azon $w(t)$ függvényeket engedjük meg, amelyek teljesítik a következő definíciót:

1. Definíció. *[11] Azt mondjuk, hogy egy $w(t)$ súlyfüggvény megengedett $[0,\infty)$-en, ha $w(t) = \nu(t)\mu(t)$ alakban írható, ahol $\nu(t)$ és $\mu(t)$ pozitív és folytonos függvények $[0,\infty)$-en, továbbá*

- *w^2 momentumai végesek, azaz*

$$\int_0^\infty t^k w^2(t) \, \mathrm{d}t < \infty; \tag{1}$$

- *létezik γ függvény $[0,\infty)$-en, mely*

$$\gamma(t) = \sum_{k=0}^\infty c_k t^{\gamma_k} \tag{2}$$

alakban írható, ahol $c_k > 0$ minden k-ra, $0 \le \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots$, $\lim_{k\to\infty} \gamma_k = \infty$, és létezik $C_0 > 0$, hogy minden $t > C_0$ esetén

$$\frac{1}{w^2} \le \gamma(t), \tag{3}$$

valamint létezik $C > 1$, melyre

$$\int_0^\infty \gamma\left(\frac{t}{C}\right) w^2(t) \, \mathrm{d}t < \infty; \tag{4}$$

- *$\mu(t)$-re igaz, hogy*

$$\lim_{t\to 0+} \mu(t) \in (0,\infty);$$

- *létezik $a > 0$ egész, hogy*

$$\int_0^1 \left(\frac{t^{a-1}}{\nu(t)}\right)^2 \mathrm{d}t < \infty. \tag{5}$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $a \geq 1$. A klasszikus súlyfüggvények, mint azt látni fogjuk a 2. példában, teljesítik az 1. definíció feltételeit, de a definíció megenged olyan súlyfüggvényeket is, melyek nem teljesítik a szokásos konvexitási feltételt (ld. pl. Malliavin [17], Zikkos [24]).

Jelen dolgozatban a fenti általános súlyfüggvényekre bizonyítok tételeket, [11] cikket általánosítom multiplicitással is rendelkező exponens-sorozat esetére. Fuchs, Malliavin és G. Horváth Ágota a $\{t^{a_k}\}$ rendszerrel foglalkoztak, ahol a kitevők a $\mathbf{A} = \{a_k\}$ pozitív, növekvő sorozat elemei, melyre teljesül, hogy létezik $c > 0$, amire $a_{n+1} - a_n \geq c$ igaz minden szomszédos elemre.

Később felmerült az olyan sorozatok vizsgálatának kérdése, melyekben az elemek multiplicitással rendelkeznek (pl. G.V. Badalyan [2], A. F. Leontev [16] , X. Yang [23], E. Zikkos [24]). Ezen sorozatoknál megváltozik a növekedési feltétel. Zikkos cikke által motiválva, a dolgozatban olyan sorozatokat tekin-tünk, melyeknek néhány eleme ismétlődhet, esetleg végtelen sokszor is. Egészen pontosan definiáljuk sorozatoknak egy osztályát, majd belőlük képezzük a multiplicitással rendelkező sorozatokat:

2. Definíció. *[24] Azt mondjuk, hogy egy $\{a_n\}$ valós sorozat az $\mathbf{L}(c, D)$ osztályba tartozik, ha $\{a_n\}$ valós növekvő, pozitív sorozat, és*

- *létezik $c > 0$, hogy*

$$a_{n+1} - a_n \geq c, \tag{6}$$

  minden $n \geq 1$-re, és

- *létezik $D \geq 0$, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n} = D. \tag{7}$$

Ennek segítségével definiáljuk a multiplicitással ellátott sorozatok osztályát:

3. Definíció. *[24] Legyen $\mathbf{A} = \{a_n\} \in \mathbf{L}(c, D)$, és α, β pozitív valós számok, melyekre $\alpha + \beta < 1$ teljesül. Azt mondjuk, hogy egy $\mathbf{B} = \{b_n\}$ pozitív valós sorozat (nem feltétlenül növekvő sorrendben) az $\mathbf{A}_{\alpha,\beta}$ osztályba tartozik, ha*

- *minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$b_n \in \{z \mid |z - a_n| \leq a_n^\alpha\}, \tag{8}$$

  vagyis b_n a_n-nek a_n^α sugarú zárt környezetén belül van, és

- *minden $m \neq n$ indexre a következő két állítás közül az egyik igaz:*

$$b_m = b_n \text{ vagy } |b_m - b_n| \geq \max\left\{e^{-a_m^\beta}, e^{-a_n^\beta}\right\}. \tag{9}$$

$\{b_n\}$-t írhatjuk a $\Lambda = \{\lambda_n, \mu_n\}$ alakban is, ha csoportosítjuk az azonos tagokat, azokat egy λ_n-nek vesszük, μ_n multiplicitással, és az így kapott sorozatot növekvő sorrendbe rendezzük, azaz $\lambda_n < \lambda_{n+1}$. Ezt a formát $\{b_n\}$ (λ, μ) *átrendezésének* nevezzük.

Nézzünk egy példát arra, hogy az így definiált sorozatok mennyiben jelentenek továbblépést az $\{a_n\} \in \mathbf{L}(c, D)$ sorozatokhoz képest.

1. Példa. *[24] Legyen*

$$\lambda_n = \begin{cases} \left(\frac{n+1}{2}\right)^2, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ \frac{n^2}{4} + \frac{4}{n^2}, & \text{ha } n \text{ páros,} \end{cases} \qquad \mu_n = \begin{cases} \frac{n+3}{2}, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ \frac{n}{2}, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

Ekkor $\Lambda = \{\lambda_n, \mu_n\}$ a (λ, μ) átrendezettje egy $\mathbb{N}$-ből definiált $\mathbf{A}_{\alpha,\beta}$-beli sorozatnak. A 3. definíció feltételei szerint erre a példára az is teljesül, hogy

$$\liminf_{n\to\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = 0,$$

illetve

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = \infty,$$

vagyis az elemek egyre közelebb kerülnek egymáshoz, és a multiplicitások a végtelenhez tartanak.

Amivel én foglalkozom, az az

$$S := \operatorname{span} \{t^{\lambda_k} \ln^l t \mid l = 0, 1, \ldots, \mu_k - 1\}_{k=1}^{\infty} \tag{10}$$

rendszer sűrűsége $L^2_w(0, \infty)$-n, amennyiben $\{\lambda_k, \mu_k\}$ egy $\{b_n\} \in \mathbf{A}_{\alpha,\beta}$ sorozat (λ, μ) átrendezettje, w pedig megengedett súlyfüggvény.

Megjegyezzük, hogy t helyébe e^t-t írva, $S = \operatorname{span} \{t^l e^{\lambda_k t} \mid l = 0, 1, \ldots, \mu_k - 1\}_{k=1}^{\infty}$, ez esetben exponenciális rendszerről beszélünk. A súlyfüggvények egy szűkebb osztályára vonatkozóan Zikkos [24] bizonyított teljességi tételeket az exponenciális rendszerre. A mostani dolgozat azonban több a megfelelő helyettesítésnél, a következő példában ugyanis felsorolunk néhány súlyfüggvényt, melyek teljesítik az 1. definíciót, de van olyan köztük, melyekre Zikkos [24] eredménye nem alkalmazható:

2. Példa. *1. definíció speciális eseteként adódik több nevezetes súlyfüggvény is. Könnyen ellenőrizhető, hogy $w(t) = t^\beta e^{-Dt^\alpha}$, ahol $\beta > -\frac{1}{2}$, és $\alpha > 0$, megengedett súlyfüggvény, ugyanis momentumai végesek, $\gamma(t) = e^{3Dt^\alpha}$ pedig teljesíti a feltételeket.*

Ha $\beta = 0$, és $D = \alpha = 1$, akkor a $w(t) = e^{-t}$ esetet kapjuk, amellyel kapcsolatban, mint fent említettük, Fuchs fogalmazott meg tételt.

Ha $\beta > -\frac{1}{2}$, $D = \frac{1}{2}$ és $\alpha = 1$, akkor $w^2(t) = t^{2\beta} e^{-t}$ egy Laguerre-súly.

Ha $\beta = 0$, $D > 0$ és $\alpha > 1$, akkor $w(t) = e^{-Dt^\alpha}$ egy Freud-súly.

Ha most $w(t) = (4 + \sin t) t^\beta \prod_{k=1}^n e^{-D_k t^{\alpha_k}}$, ahol $\beta > -\frac{1}{2}$, illetve $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$, és $D_n > 0$, akkor w megengedett, és $\gamma(t) = e^{Dt^{\alpha_n}}$ jó választás a feltételek teljesítésére, ha D elég nagy.

Speciálisan, ha $\beta = n = 1$, $D_1 = \alpha_1 = 1$, akkor $w(t) = t(4 + \sin t)e^{-t}$. Zikkos [24] cikkében a súlyfüggvény $w(e^t) = e^{-w_1(t)}$ alakban szerepel. Mivel most $w_1(t) = -\ln w(e^t)$ második deriváltjának vannak negatív értékei (A, ∞)-n tetszőleges $A > 0$-ra, ezért ez esetben Zikkos tétele nem használható.

A klasszikus súlyfüggvények teljesítik még a következő tulajdonságot is:

4. Definíció. *[11] Legyen w olyan súlyfüggvény, hogy w^2 momentumai végesek (teljesül (1) tulajdonság). Ekkor azt mondjuk, hogy w ,,normális", ha a w^2-hez tartozó n. ortogonális polinom legnagyobb $x_{1,n}$ gyökére teljesül, hogy*

$$x_{1,n} \leq e^{cn},$$

ahol $c = c(w)$ n-től független pozitív konstans.

Ezt a tulajdonságot a tételek bizonyítása során fel fogjuk használni.

3. Példa. *Tekintsük a 2. példa súlyfüggvényeit. A Laguerre- és Freud-súlyok esetében $x_{1,n} \leq cn^{\lambda}$, ahol λ a súlyfüggvénytől függő pozitív konstans.*

A. Markov egy eredményét felhasználva ([21], 6.12.2. *tétel), hasonló becsléseket végezhetünk a fenti példákra. Például, ha $w(t) = t^{\beta}e^{-t^{\alpha}}$, akkor létezik $\gamma > 0$, hogy $W(t) = t^{\gamma}e^{-t}$ esetén $\frac{W}{w}$ növekvő $(0, \infty)$-n, ha pedig $w(t) = t(4 + \sin t)e^{-t}$, akkor a megfelelő $W(t) = t^2 e^{-\frac{t}{2}}$.*

A témával kapcsolatos irodalomban (mint azt láttuk pl. a B. és a C. tételnél), elterjedt a következő jelölésmód:

5. Definíció. *Legyen $\mathbf{A} = \{a_k\}$ pozitív, növekvő sorozat. Definiáljuk ekkor a következő $m(r)$ és $\psi(r)$ függvényeket:*

$$m_{\mathbf{A}}(r) = \begin{cases} 0, & \text{ha } r < a_1; \\ \sum_{a_k \leq r} \frac{1}{a_k}, & \text{ha } a_1 \leq r, \end{cases}$$

illetve

$$\Psi_{\mathbf{A}}(r) = e^{2m_{\mathbf{A}}(r)}. \tag{11}$$

Megjegyezzük, hogy az 5. definícióban több helyen $r < a_1$ esetén $m_{\mathbf{A}(r)} = \frac{1}{a_1}$ szerepel (pl. a B. tétel, vagy [11]), a következő tételekben azonban ez a különbség nem okoz problémát. Mi Zikkos [24] cikke alapján az 5. definíciót használjuk.

Ez utóbbi definíciók értelmezhetőek $\{b_n\} \in \mathbf{A}_{\alpha,\beta}$ sorozat esetén is: legyen $\{b_n\}$ (λ, μ) átrendezettje $\Lambda = \{\lambda_n, \mu_n\}$. Ekkor

$$m_{\Lambda}(r) = \begin{cases} 0, & \text{ha } r < \lambda_1; \\ \sum_{\lambda_k \leq r} \frac{\mu_k}{\lambda_k}, & \text{ha } \lambda_1 \leq r, \end{cases}$$

illetve

$$\Psi_{\Lambda}(r) = e^{2m_{\Lambda}(r)}.$$

2. Eddigi eredmények

Ebben a szakaszban áttekintjük [11] azon eredményeit, melyeket általánosítani fogunk, illetve megfogalmazunk néhány definíciót, lemmát, melyek a 3. szakasz bizonyításaiban szükségesek lesznek. A tételek könyebb felírása végett tekintsük a következő definíciót:

6. Definíció. *Legyen w pozitív folytonos súlyfüggvény, melyre teljesül, hogy w^2 momentumai végesek (teljesül (1)). Ekkor definiáljuk $\varphi(x)$ és $K(x)$ függvényeket a következőképpen:*

$$\varphi(x) = \left(\int_0^\infty t^{2x} w^2(t)\,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2x}} = (K(x))^{\frac{1}{2x}}, \ x > 0. \tag{12}$$

Ezzel kimondhatjuk az alábbi két tételt:

D. Tétel. *[11] Legyen w megengedett és normális súlyfüggvény $[0,\infty)$-en, $\mathbf{A} = \{a_k\}$ növekvő sorozat, mely teljesíti (6) növekedési feltételt. Ha létezik monoton növekvő f függvény $[0,\infty)$-en, amelyre teljesül, hogy*

- *minden $0 < x \le r$ esetén*
$$x \ln \frac{\Psi_{\mathbf{A}}(r)}{\varphi(x)} \le f(r),$$
- *illetve*
$$\int_1^\infty \frac{f(r)}{r^2}\,\mathrm{d}r < \infty,$$

akkor span $\{t^{a_k}\}$ *nem sűrű $L^2_w(0,\infty)$-n.*

E. Tétel. *[11] Legyen w pozitív és folytonos $(0,\infty)$-en úgy, hogy w^2 momentumai végesek (azaz teljesül (1) feltétel), $\mathbf{A} = \{a_k\}$ monoton növekvő pozitív sorozat, melyre teljesül, hogy létezik $d > 0$, hogy*

$$a_{k+1} - a_k > d.$$

Ha létezik monoton növekvő h függvény $[0,\infty)$-en, melyre

- *létezik $0 < C, D$, hogy*
$$C < \frac{h(r)}{h(r_1)} < D, \text{ amint } \frac{1}{2} \le \frac{r}{r_1} \le 2; \tag{13}$$
- *létezik $\alpha, C, c > 0$, hogy minden $0 < x \le r$ esetén*
$$0 < h(r) \le C^{\frac{1}{x}} \frac{cx}{\varphi^\alpha(x)} \Psi^\alpha_{\mathbf{A}}(r);$$
- *valamint*
$$\int_1^\infty \frac{h(r)}{r^2}\,\mathrm{d}r = \infty, \tag{14}$$

akkor $\operatorname{span}\{t^{a_k}\}$ *sűrű* $L^2_w(0,\infty)$*-en.*

A bizonyítások alapvetően a következő tételre épülnek (pl. [19] 115. oldal):

F. Tétel. *X Banach-tér esetén $\operatorname{span}\{h_n\} \subset X$ pontosan akkor nem sűrű, ha létezik nemtriviális $\psi \in X^*$ korlátos lineáris funkcionál, mely eltűnik $\{h_n\}$ elemein, azaz $\psi(h_n) = 0$.*

A D. tétel bizonyításának alapgondolata a következő: az F. tételt felhasználandó, megmutatjuk, hogy a tétel feltételei mellett létezik nemtriviális korlátos lineáris funkcionál $L^2_w(0,\infty)$-n, amely $\{t^{a_k}\}$ elemein nullává válik. Ehhez felhasználjuk Riesz reprezentációs tételét, mely szerint bármely $\phi \in L^{2\,*}_w(0,\infty)$ korlátos lineáris funcionál felírható $\phi(f) = \int\limits_0^\infty f(t)g(t)w^2(t)\,\mathrm{d}t$ alakban, ahol $g \in L^2_w(0,\infty)$.

A bizonyítás során fontos szerepet kap egy lemma:

1. Lemma. *[11] Legyen $a > 0$ egész. Ha w^2 pozitív, folytonos normális súlyfüggvény $(0,\infty)$-n, és momentumai végesek, akkor $z = x + \mathrm{i}y$ jelölés mellett létezik olyan $b(z)$ függvény, hogy $\frac{1}{b(z)}$ reguláris $\Re z = x > -a$-n, és $\Re z \geq -\frac{1}{2}$ esetén*

$$\sqrt{\frac{K(x+a)}{K(x)}} \leq |b(z)|.$$

Az E. tétel bizonyításának alapgondolata: indirekt tegyük fel, hogy az adott feltételek mellett $\operatorname{span}\{t^{a_k}\}$ nem sűrű, és ebből jutunk ellentmondásra az F. tétel és Fuchs [9] következő lemmája segítségével:

2. Lemma. *[9] Ha h nemnegatív, monoton növekvő függvény $(0,\infty)$-en úgy, hogy teljesíti (13) és (14) feltételeket, és $z = x + \mathrm{i}y$, $r = |z|$ jelölés mellett létezik $\Re z = x \geq 0$ tartományon reguláris g függvény, melyre $C, c, \alpha > 0$ esetén*

$$|g(z)| \leq C\left(\frac{cx}{h(r)}\right)^{\frac{x}{\alpha}}$$

teljesül, akkor $g \equiv 0$ $\Re z \geq 0$-n.

Ezen tételek tehát a $\operatorname{span}\{t^{a_k}\}$ sűrűségével kapcsolatosak. A sűrűség kérdése ekvivalens valamely félsíkon reguláris, speciális növekedési tulajdonsággal rendelkező függvények létezésével. A két problémakör közti kapcsolatot az alábbi típusú függvények vizsgálata jelenti:

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - z}{a_n + z} e^{\frac{2z}{a_n}},\ \Re z = x \geq 0.$$

$G(z)$-re vonatkozóan Fuchs [9] bizonyított tételt. Ennek egy változata (Zikkos [24]) a következő:

3. Lemma. *[24] Legyen* $\mathbf{A} = \{a_n\}$ *olyan pozitív, növekvő sorozat, mely teljesíti (6) növekedési feltételt* ($a_{n+1} - a_n \geq c > 0$)*. Ekkor* $z = x + iy$ *és* $r = |z|$ *jelölések mellett a* $G(z)$ *függvény analitikus a* $\Re z = x > 0$ *tartományon, és zérushelyei egyszeresek. Emellett létezik* $\kappa > 0$*, hogy*

$$|G(z)| \leq e^{2xm_{\mathbf{A}}(r)+\kappa x}, \text{ ha } \Re z > 0; \tag{15}$$

továbbá

$$|G(z)| \geq e^{2xm_{\mathbf{A}}(r)-\kappa x}, \text{ ha } \Re z > 0 \text{ és } |z - a_n| \geq \frac{c}{4}. \tag{16}$$

Vegyük észre, hogy a lemma igaz $\Re z = x = 0$-ra is, ekkor (15) és (16) egyenlőtlenségek triviálisan igazak.

Egyszerűen látható, hogy (11) alapján (15) és (16) következmények a következőképpen is kimondhatók: létezik $C_1, C_2 > 0$, hogy

$$|G(z)| \leq (C_1 \Psi_{\mathbf{A}}(r))^x, \text{ ha } \Re z \geq 0;$$

illetve

$$|G(z)| \geq (C_2 \Psi_{\mathbf{A}}(r))^x, \text{ ha } \Re z \geq 0 \text{ és } |z - a_n| \geq \frac{c}{4}.$$

Az általam igazolt tételek (10) rendszer sűrűségére vonatkoznak, vagyis növekvő pozitív sorozatok helyett az $\mathbf{A} = \{a_n\} \in \mathbf{L}(c, D)$ sorozatokból képezett $\{b_n\} \in \mathbf{A}_{\alpha,\beta}$ sorozatokból indulunk ki. Ennek előnye, hogy megjelenik a sorozat elemeinek esetleges multiplicitása.

(10) rendszer vizsgálatához felhasználjuk Zikkos [24] eredményét, amelyben a 3. lemma megfelelőjét mondja ki $\mathbf{A}_{\alpha,\beta}$-beli sorozatokra:

4. Lemma. *[24] Legyen* $\mathbf{A} = \{a_n\} \in \mathbf{L}(c, D)$*,* $\mathbf{B} = \{b_n\} \in \mathbf{A}_{\alpha,\beta}$*, és* $\Lambda = \{\lambda_n, \mu_n\}$ *a* $\{b_n\}$ (λ, μ) *átrendezettje. Ekkor* $z = x + iy$ *és* $r = |z|$ *jelölések mellett a*

$$H(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{b_n - z}{b_n + z} e^{\frac{2z}{b_n}} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_n - z}{\lambda_n + z} \right)^{\mu_n} e^{\frac{2z\mu_n}{\lambda_n}}, \ \Re z = x \geq 0$$

függvény analitikus $\Re z = x > 0$ *tartományon, és csak a* $\Lambda = \{\lambda_n, \mu_n\}$ *sorozat elemein tűnik el. Emellett léteznek* A_1, A_2 *konstansok, hogy*

$$|H(z)| \leq e^{2xm_{\Lambda}(r)+A_1 x}, \text{ ha } \Re z > 0; \tag{17}$$

illetve

$$|H(z)| \geq e^{2xm_{\Lambda}(r)-A_2 x}, \text{ ha } \Re z > 0, \text{ és } |z - b_n| \geq \frac{e^{-a_n^{\beta}}}{3}. \tag{18}$$

Az előzőekhez hasonlóan, (17) és (18) is igaz $\Re z = x = 0$ esetén is. (11) alapján (17) és (18) következmények a következőképpen is kimondhatók: létezik $C_1, C_2 > 0$, hogy

$$|H(z)| \leq (C_1 \Psi_{\Lambda}(r))^x, \text{ ha } \Re z \geq 0; \tag{19}$$

illetve

$$|H(z)| \geq (C_2 \Psi_{\Lambda}(r))^x, \text{ ha } \Re z \geq 0 \text{ és } |z - b_n| \geq \frac{e^{-a_n^{\beta}}}{3}. \tag{20}$$

További lemmák, amiket a bizonyításokhoz használok:

5. Lemma. *Ha $u(t)$ valós értékű, majdnem mindenütt folytonos és korlátos függvény, akkor az*

$$f(z) := f(x + \mathrm{i}y) = \frac{x-a}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)}{(x-a)^2 + (y-t)^2} \,\mathrm{d}t \tag{21}$$

függvény harmonikus a $\Re z = x > a$ félsíkon.

(21)-et a $\Re z > a$ félsíkon vett *Poisson-integrálformulának* nevezik. Az 5. állítás helyessége könnyen adódik pl. [12] 10.3. tételéből.

A bizonyítások további fontos eszköze a Mellin-transzormáció:

7. Definíció. *f függvény Mellin-transzformáltjának nevezzük a*

$$\phi(z) = \{\mathcal{M}f\}(z) = \int\limits_{0}^{\infty} t^{z-1} f(t) \,\mathrm{d}t \tag{22}$$

függvényt. Az inverz transzformáció:

$$f(t) = \{\mathcal{M}^{-1}\phi\}(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} t^{-z}\phi(z) \,\mathrm{d}z. \tag{23}$$

6. Lemma. *Ha $f(t)$ függvény Mellin-transzformáltja $\phi(z)$, akkor $f(t)\ln t$ függvény Mellin-transzformáltja $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\phi(z)$.*

Bizonyítás: Az $f(t)\ln t$ függvény Mellin-transzformáltja 7. definíció szerint:

$$\int\limits_{0}^{\infty} t^{z-1} f(t) \ln t \,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} t^{z-1} \cdot f(t) \,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \int\limits_{0}^{\infty} t^{z-1} f(t) \,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\phi(z),$$

feltéve, hogy a megfelelő integrálok léteznek. □

7. Lemma. *Ha $f(t)$ függvény Mellin-transzformáltja $\phi(z)$, akkor $z = x + \mathrm{i}y$ jelöléssel*

$$\int\limits_{0}^{\infty} t^{2x-1} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\phi(z)|^2 \,\mathrm{d}y.$$

A 7. lemma a *Parseval-egyenlőség* a Mellin-transzformációra. Bizonyítása: felhasználjuk, hogy a Mellin-transzformáció származtatható a Fourier-transzformációból [4]. Ha $g(s)$ Fourier-transzformáltja $G(y)$, azaz

$$G(y) = \mathcal{F}\{g(s)\}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{i}ys} g(s) \,\mathrm{d}s,$$

akkor $e^s = t$, $y = \mathrm{i}z - \mathrm{i}x$ választással, és $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{-x} g(\ln t) =: f(t)$, $G(\mathrm{i}z - \mathrm{i}x) = \phi(z)$ jelöléssel:

$$\phi(z) = G(\mathrm{i}z - \mathrm{i}x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(z-x)s} g(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} t^{z-x} g(\ln t) \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{z-1-x} g(\ln t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^{z-1} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

ami összhangban van a 7. definícióval. A Fourier-transzformációra vonatkozó Parseval-egyenlőség [4] szerint

$$\|G(y)\|_{2,(-\infty,\infty)} = \|g(s)\|_{2,(-\infty,\infty)}.$$

Ekkor a fenti jelöléseket használva:

$$\|G(y)\|^2_{2,(-\infty,\infty)} = \int_{-\infty}^{\infty} |G(y)|^2\,\mathrm{d}y = \int_{x-\mathrm{i}\infty}^{x+\mathrm{i}\infty} |G(\mathrm{i}z - \mathrm{i}x)|^2 \mathrm{i}\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int_{x-\mathrm{i}\infty}^{x+\mathrm{i}\infty} |\phi(z)|^2 \mathrm{i}\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(z)|^2\,\mathrm{d}y, \quad (24)$$

illetve

$$\|g(s)\|^2_{2,(-\infty,\infty)} = \int_{-\infty}^{\infty} |g(s)|^2\,\mathrm{d}s = \int_0^\infty |g(\ln t)|^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 2\pi \int_0^\infty \frac{1}{2\pi} t^{-2x} g^2(\ln t) t^{2x-1}\,\mathrm{d}t = 2\pi \int_0^\infty |f(t)|^2 t^{2x-1}\,\mathrm{d}t. \quad (25)$$

(24) és (25) egyenlősége adja a tételt. □

A Mellin-transzformáció nem csak esetünkben bizonyul hasznos eszközek, a rá vonatkozó újabb eredményekkel, illetve a fizikában való alkalmazásaival kapcsolatban ld. pl. [10].

3. Új eredmények

Igazolom a D. tétel multiplicitással vett változatát:

1. Tétel. *Legyen w megengedett és normális súlyfüggvény $[0,\infty)$-en, $\mathbf{A} = \{a_k\} \in \mathbf{L}(c, D)$, $\mathbf{B} = \{b_n\} \in \mathbf{A}_{\alpha,\beta}$, melynek (λ,μ) átrendezettje $\Lambda = \{\lambda_n, \mu_n\}$. Ha létezik monoton növekvő f függvény $[0,\infty)$-en, amelyre teljesül, hogy*

- *minden $0 < x \leq r$ esetén*

$$x \ln \frac{\Psi_\Lambda(r)}{\varphi(x)} \leq f(r), \quad (26)$$

- *illetve*

$$\int_1^\infty \frac{f(r)}{r^2}\,\mathrm{d}r < \infty, \tag{27}$$

akkor (10), vagyis

$$S = \operatorname{span}\{t^{\lambda_k}\ln^l t \mid l = 0,1,\ldots,\mu_k - 1\}_{k=1}^{\infty}$$

nem sűrű $L_w^2(0,\infty)$-n.

Bizonyítás: A célunk mutatni egy $\Phi \in L_w^{2\,*}(0,\infty)$ nemtriviális korlátos lineáris funkcionált, amely $\{t^{\lambda_k}\ln^l t \mid l = 0,1,\ldots,\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ elemein nullává válik, ekkor az F. tétel szerint S nem sűrű. Riesz reprezentációs tétele szerint minden Φ korlátos lineáris funkcionál esetén létezik $\hat{n} \in L_w^2(0,\infty)$ függvény, hogy bármely $\hat{g} \in L_w^2(0,\infty)$ esetén a funkcionál

$$\Phi(\hat{g}) = \int_0^\infty \hat{g}(t)\hat{n}(t)w^2(t)\,\mathrm{d}t \tag{28}$$

alakban írható. A továbbiakban tehát célunk egy olyan $\hat{n}$ függvény konstruálása, melyre (28) által definiált funkcionál teljesíti a fenti követelményeket.

Terjesszük ki a tételben szereplő f-et párosan az egész valós számegyenesre, azaz legyen $f(-r) = f(r)$. Mivel (27) szerint $\int_0^\infty \frac{f(r)}{r^2}\,\mathrm{d}r < \infty$, ezért $z = x + \mathrm{i}y$, $r = |z|$ jelölés mellett definiálhatjuk a következő függvényt:

$$p(z) = p(x + \mathrm{i}y) := 2 \cdot \frac{x+a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(x+a)^2 + (t-y)^2}\,\mathrm{d}t,$$

ahol a a megengedett súlyfüggvény definíciójában szereplő (5) feltétel a-ja. Az ott tett megjegyzés szerint feltehető, hogy $a \geq 1$. Az 5. lemma miatt $p(z)$ függvény harmonikus a $\Re z = x > -a$ tartományon, ezen kívül feltehető, hogy $f > 0$.

Mivel $f(t)$ $(t \geq 0)$ növekvő, ezért ha $|t| \geq r$, akkor $f(t) \geq f(r)$, így

$$p(z) \geq 2 \cdot \frac{f(r)}{\pi} \int_{|t|\geq r} \frac{x+a}{(x+a)^2 + (t-y)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 2 \cdot \frac{f(r)}{\pi}\left(\pi - \left(\operatorname{arctg}\frac{r-y}{x+a} + \operatorname{arctg}\frac{r+y}{x+a}\right)\right) > f(r). \tag{29}$$

Az utolsó egyenlőtlenség adódik a következőkből: vegyünk fel egy derékszögű háromszöget, melyben a befogók c átfogóra merőleges vetületeinek hossza $r - y$, illetve $r + y$. A magasságtétel szerint ekkor az átfogóhoz tartozó magasság: $\sqrt{(r-y)(r+y)} = \sqrt{r^2 - y^2} = x$, hiszen $x^2 + y^2 = r^2$. Hosszabbítsuk meg az átfogóhoz tartozó magasságot $a > 0$-val, majd a kapott szakasz végpontját kössük össze az átfogó végpontjaival. Ekkor a fenti arkusztangensek összege nem más, mint a keletkező háromszög c-vel szemközti szögének nagysága, amely $\frac{\pi}{2}$-nél kisebb, ebből pedig már adódik a fenti egyenlőtlenség.

Mivel tehát p harmonikus, ezért létezik olyan q, hogy $-p + \mathrm{i}q$, és így

$$g(z) := e^{-p+\mathrm{i}q}$$

reguláris függvény $\Re z > -a$ esetén, és $g(z) \neq 0$. Ekkor (29)-et felhasználva:

$$|g(z)| = |e^{-p(z)+\mathrm{i}q(z)}| = |e^{-p(z)}| \cdot \underbrace{|e^{\mathrm{i}q(z)}|}_{1} \leq |e^{-f(r)}| = e^{-f(r)}, \text{ ha } \Re z > -a. \tag{30}$$

(26) feltétel szerint $0 < x \leq r$-en

$$x \ln \frac{\Psi_\Lambda(r)}{\varphi(x)} \leq f(r)$$
$$e^{-x \ln \frac{\Psi_\Lambda(r)}{\varphi(x)}} \geq e^{-f(r)}$$
$$e^{\ln\left(\frac{\varphi(x)}{\Psi_\Lambda(r)}\right)^x} \geq e^{-f(r)},$$

azaz

$$\left(\frac{\varphi(x)}{\Psi_\Lambda(r)}\right)^x \geq e^{-f(r)}, \tag{31}$$

ha $\Re z = x \geq 0$. (30) és (31) egyenlőtlenségekből tehát

$$|g(z)| \leq e^{-f(r)} \leq \left(\frac{\varphi(x)}{\Psi_\Lambda(r)}\right)^x \tag{32}$$

adódik, ha $\Re z \geq 0$.

Definiáljuk most a következő H függvényt:

$$H(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{b_k - z}{b_k + z} e^{\frac{2z}{b_k}} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k - z}{\lambda_k + z}\right)^{\mu_k} e^{\frac{2z\mu_k}{\lambda_k}}, \text{ ha } \Re z = x \geq 0. \tag{33}$$

A 4. lemma szerint H reguláris $\Re z > 0$-n, illetve (19) szerint létezik C_1 konstans, hogy

$$|H(z)| \leq (C_1 \Psi_\Lambda(r))^x, \text{ ha } \Re z \geq 0.$$

A továbbiakban $\{b_n\}$ (λ, μ) átrendezett alakját vizsgáljuk. Írjunk λ_k-k helyébe $\lambda_k + a$-t H definíciójában, így kapjuk a következő H^* függvényt:

$$H^*(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k + a - z}{\lambda_k + a + z}\right)^{\mu_k} e^{\frac{2z\mu_k}{\lambda_k + a}}.$$

$H^*(z)$ reguláris, ha $\Re z > 0$. $g(z)$ és $H^*(z)$ segítségével definiáljuk a következő $G(z)$ függvényt:

$$G(z) := \frac{g(z+a) H^*(z+a)}{b(z) C_1^{z+a}}, \tag{34}$$

ahol $\frac{1}{b(z)}$ reguláris $\Re z > -a$-n, és

$$\sqrt{\frac{K(x+a)}{K(x)}} \leq |b(z)|, \text{ ha } \Re z = x \geq -\frac{1}{2}, \tag{35}$$

valamint ha $-a < \Re z \le -\frac{1}{2}$, akkor $|b(z)| > \delta > 0$ (ld. [11], 1. lemma). Az így definiált $G(z)$ függvény reguláris $\Re z > -a$-n.

Becsüljük most $H^*(z+a)$-t. A későbbiekben bizonyításra kerülő 8. lemma szerint az $\{a_n\}$ sorozatból származtatott $\mathbf{A}' = \{a_n + a\}$ sorozat is $\mathbf{L}(c, D)$-beli, és ekkor $\{b_n + a\} \in \mathbf{A}'_{\alpha,\beta}$. $H^*(z)$ nem más, mint $\{b_n + a\}$ (λ, μ) átrendezettjére, $\Lambda' = \{\lambda_n + a, \mu_n\}$-re felírt (33) típusú-szorzat. Így a Zikkos-féle 4. lemma következménye szerint létezik C_2, hogy

$$|H^*(z)| \le (C_2 \Psi_{\Lambda'}(r))^x = (C_2 e^{2m_{\Lambda'}(r)})^x, \text{ ha } \Re z = x \ge 0.$$

Mivel

$$m_{\Lambda'}(r) = \sum_{\lambda_k + a \le r} \frac{\mu_k}{\lambda_k + a} \le \sum_{\lambda_k \le r} \frac{\mu_k}{\lambda_k + a} \le \sum_{\lambda_k \le r} \frac{\mu_k}{\lambda_k} = m_\Lambda(r),$$

ezért végül a következőt kapjuk:

$$|H^*(z)| \le (C_2 e^{2m_{\Lambda'}(r)})^x \le (C_2 e^{2m_\Lambda(r)})^x = (C_2 \Psi_\Lambda(r))^x, \text{ ha } \Re z = x \ge 0.$$

Ekkor

$$|H^*(z+a)| \le (C_2 \Psi_\Lambda(r'))^{x+a}, \text{ ha } \Re(z+a) \ge 0 \Leftrightarrow \Re z \ge -a. \tag{36}$$

A következőkben (34) által definiált G függvényt becsüljük $\Re z \ge -a$-n, először (32), (35) és (36) segítségével, ha $\Re z > -\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} |G(z)| = \frac{|g(z+a)| \cdot |H^*(z+a)|}{|b(z)| \cdot |C_1^{z+a}|} \le \\ \le \left(\frac{\varphi(x+a)}{\Psi_\Lambda(r')} \right)^{x+a} \cdot \sqrt{\frac{K(x)}{K(x+a)}} \cdot (C_2 \Psi_\Lambda(r'))^{x+a} \cdot \frac{1}{|C_1^{z+a}|}. \end{aligned} \tag{37}$$

Felhasználva, hogy (12) szerint $K(x) = \varphi^{2x}(x)$, (37) tovább írható:

$$\begin{aligned} |G(z)| \le \varphi^{x+a}(x+a) \cdot \frac{\varphi^x(x)}{\varphi^{x+a}(x+a)} \cdot \frac{C_2^{x+a}}{|C_1^{z+a}|} = \varphi^x(x) \cdot \frac{C_2^{x+a}}{|C_1^{z+a}|} \le \\ \le \varphi^x(x), \text{ ha } \Re z = x > -\frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{38}$$

illetve $\frac{C_2^{x+a}}{|C_1^{z+a}|} < 1$, vagyis C_1 elég nagy.

Ha pedig $a > \frac{1}{2}$ (mint mondtuk, feltehető $a \ge 1$ is), azaz $\Re z \in \left[-a, -\frac{1}{2}\right]$, akkor G becslése (32), (36) és $|b(z)| > \delta > 0$ segítségével történik:

$$\begin{aligned} |G(z)| \le \frac{1}{\delta} \cdot \varphi^{x+a}(x+a) \cdot \frac{C_2^{x+a}}{|C_1^{x+a}|} \le \frac{1}{\delta} \max_{x \in \left[-a, -\frac{1}{2}\right]} \sqrt{K(x+a)} = \\ = M, \text{ ha } \Re z = x \in \left[-a, -\frac{1}{2}\right], \end{aligned} \tag{39}$$

felhasználva ismét, hogy $K(x) = \varphi^{2x}(x)$, illetve C_1 elég nagy.

Most megmutatjuk, hogy ekkor S nem sűrű $L^2_w(0,\infty)$-n. Mindezt a 7. definícióban megadott inverz Mellin-transzformáció segítségével tesszük. Legyen $\phi(z) = \frac{G(z)}{(1+a+z)^2}$. Ekkor definiáljuk $u(t)$ függvényt (23) segítségével:

$$t\nu(t)u(t) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \frac{G(z)}{(1+a+z)^2} t^{-z}\,\mathrm{d}z, \text{ ha } \Re z \geq -a, \tag{40}$$

ahol $\nu(t)$ a megengedett súlyfüggvény 1. definíciója-beli ν. Paraméterezzünk $z = x + \mathrm{i}y$-nal, ahol $-\infty < y < \infty$. Ekkor (40):

$$t\nu(t)u(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{G(z)}{(1+a+z)^2} t^{-z}\,\mathrm{d}y. \tag{41}$$

Egyszerűen látható, pl. két x_1, x_2 választásával, a fenti függvény integrálját az $x_1+\mathrm{i}L, x_2+\mathrm{i}L, x_2-\mathrm{i}L, x_1-\mathrm{i}L$ téglalapon véve, ahol $L \to \infty$, hogy az integrál független x-től.

Mivel az inverz Mellin-transzformáció segítségével definiáltuk a bal oldalt, ezért (22) szerint egyszersmind

$$\frac{G(z)}{(1+a+z)^2} = \int\limits_0^{\infty} t^{z-1} t\nu(t)u(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\infty} t^z \nu(t)u(t)\,\mathrm{d}t \tag{42}$$

is igaz.

Definiáljuk ekkor a következő $n(t)$ függvényt:

$$n(t) := \frac{\nu(Ct)u(Ct)}{w^2(t)},$$

ahol C a megengedett súlyfüggvény 1. definíciója beli C. Megmutatjuk, hogy $n(t) \in L^2_w(0,\infty)$. Tekintsük a normájának négyzetét:

$$\|n(t)\|^2_{2,w} = \int\limits_0^{\infty} \frac{u^2(Ct)\nu^2(Ct)}{w^2(t)}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int\limits_0^{\frac{A}{C}} \frac{u^2(Ct)\nu^2(Ct)}{w^2(t)}\,\mathrm{d}t}_{I.} + \underbrace{\int\limits_{\frac{A}{C}}^{\infty} \frac{u^2(Ct)\nu^2(Ct)}{w^2(t)}\,\mathrm{d}t}_{II.}, \tag{43}$$

ahol $A = \max\{1, CC_0\}$, C_0 a megengedett súlyfüggvény 1. definíciója-beli C_0.

Ha $CC_0 \geq 1$, akkor $\frac{A}{C} = C_0$, így $II.$-ben $t > C_0$. Ha $CC_0 < 1$, akkor $\frac{A}{C} = \frac{1}{C} > C_0$, így $II.$-ben $t > \frac{1}{C} > C_0$, vagyis mindenképpen $II.$-ben $t > C_0$ teljesül. Ekkor a megengedett súlyfüggvény definíciója szerint létezik $\gamma(t)$ függvény, mely (2) és (3) tulajdonságokat teljesíti, így a Beppo-Levi-tételt használva, mivel c_k-k pozitívak:

$$II. \leq \int\limits_{\frac{A}{C}}^{\infty} \nu^2(Ct)u^2(Ct) \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{\gamma_k}\,\mathrm{d}t = \int\limits_A^{\infty} \nu^2(t)u^2(t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{C^{\gamma_k+1}} t^{\gamma_k}\,\mathrm{d}t \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{C^{\gamma_k+1}} \int\limits_A^{\infty} t^{\gamma_k} \nu^2(t) u^2(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{k \\ \gamma_k < \frac{1}{3}}} \frac{c_k}{C^{\gamma_k+1}} \int\limits_A^{\infty} t^{\gamma_k} \nu^2(t) u^2(t)\,\mathrm{d}t}_{S_1} + \underbrace{\sum_{\substack{k \\ \gamma_k \geq \frac{1}{3}}} \frac{c_k}{C^{\gamma_k+1}} \int\limits_A^{\infty} t^{\gamma_k} \nu^2(t) u^2(t)\,\mathrm{d}t}_{S_2}.$$

A 7. lemmát alkalmazva a jelen esetre:

$$\int\limits_0^{\infty} t^{2x+1} \nu^2(t) u^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{G(z)}{(1+a+z)^2} \right|^2 \mathrm{d}y, \text{ ha } \Re z \geq -a. \tag{44}$$

Ha $\Re z > -\frac{1}{2}$, akkor (38) szerint $|G(z)| \leq \varphi^x(x)$, így ekkor

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{G(z)}{(1+a+z)^2} \right|^2 \mathrm{d}y \leq \frac{1}{2\pi} \varphi^{2x}(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|(1+a+z)^2|^2}\,\mathrm{d}y \leq c^* \cdot K(x). \tag{45}$$

Ismét [11] eredményét használva, $\frac{K(x+a)}{K(x)}$ pozitív és növekvő minden $a > 0$-ra, ezért $\frac{K(x+\frac{1}{2})}{K(x)}$ is növekvő és pozitív. Ha $x \geq -\frac{1}{3}$, akkor

$$0 < d \leq \frac{K(\frac{1}{6})}{K(-\frac{1}{3})} \leq \frac{K(x+\frac{1}{2})}{K(x)},$$

így ha $x \geq -\frac{1}{3}$, akkor

$$c^* \cdot K(x) \leq \frac{c^*}{d} K\left(x + \frac{1}{2}\right) = c \cdot K\left(x + \frac{1}{2}\right) = c \cdot \left(\varphi\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)^{2x+1}. \tag{46}$$

Tehát, ha $\Re z = x \geq -\frac{1}{3}$, akkor (44), (45) és (46) alapján kapjuk, hogy

$$\int\limits_0^{\infty} t^{2x+1} \nu^2(t) u^2(t)\,\mathrm{d}t \leq c \left(\varphi\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)^{2x+1}. \tag{47}$$

Ha most $\gamma_k = 2x + 1$, akkor $x \geq -\frac{1}{3}$ esetén $\gamma_k \geq \frac{1}{3}$, így (47) segítségével S_2 becsülhető. Felhasználva $\varphi(x)$ (12) definícióját:

$$S_2 \leq \sum_{\substack{k \\ \gamma_k \geq \frac{1}{3}}} \frac{c_k}{C^{\gamma_k+1}} \int\limits_0^{\infty} t^{\gamma_k} \nu^2(t) u^2(t)\,\mathrm{d}t \leq c \sum_{\substack{k \\ \gamma_k \geq \frac{1}{3}}} \frac{c_k}{C^{\gamma_k+1}} \left(\varphi\left(\frac{\gamma_k}{2}\right)\right)^{\gamma_k} \leq$$

$$\leq c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{C^{\gamma_k+1}} \left(\varphi\left(\frac{\gamma_k}{2}\right)\right)^{\gamma_k} = c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{C^{\gamma_k+1}} \int\limits_0^{\infty} t^{\gamma_k} w^2(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{c}{C} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int\limits_0^{\infty} \left(\frac{t}{C}\right)^{\gamma_k} w^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{c}{C} \int\limits_0^{\infty} \gamma\left(\frac{t}{C}\right) w^2(t)\,\mathrm{d}t < \infty. \tag{48}$$

Felhasználtuk $\gamma(t)$ (2) definícióját, valamint a megengedett súlyfüggvény (4) tulajdonságát. Az inverz Mellin-transzformációval való (41) definíció utáni megjegyzés szerint teljesen mindegy, milyen x-et választunk, ha az legalább az $x \geq -\frac{1}{3}$ feltételt teljesíti, a becslés működik.

S_1 becsléséhez használjuk (41)-et. $x = -\frac{1}{3}$ választás esetén teljesül, hogy $\Re z = x > -\frac{1}{2}$, így (38) szerint továbbra is $|G(z)| \leq \varphi^x(x)$ teljesül. Ekkor tehát

$$t^2\nu^2(t)u^2(t) = \frac{1}{4\pi^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(z)}{(1+a+z)^2} t^{-z}\,\mathrm{d}y\right)^2 \leq \frac{1}{4\pi^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G(z)|}{|(1+a+z)^2|}|t^{-z}|\,\mathrm{d}y\right)^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{4\pi^2}\left(\varphi\left(-\frac{1}{3}\right)\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot t^{\frac{2}{3}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left|\left(1+a-\frac{1}{3}+\mathrm{i}y\right)^2\right|}\,\mathrm{d}y\right)^2,$$

tehát

$$\nu^2(t)u^2(t) \leq \frac{1}{4\pi^2} t^{-\frac{4}{3}} \left(\varphi\left(-\frac{1}{3}\right)\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left|\left(\frac{2}{3}+a+\mathrm{i}y\right)^2\right|}\,\mathrm{d}y\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} t^{-\frac{4}{3}} \left(\varphi\left(-\frac{1}{3}\right)\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{\pi^2}{\left(\frac{2}{3}+a\right)^2} = \frac{\left(\varphi\left(-\frac{1}{3}\right)\right)^{-\frac{2}{3}}}{4\left(\frac{2}{3}+a\right)^2} t^{-\frac{4}{3}} = ct^{-\frac{4}{3}}.$$

Ekkor

$$t^{\gamma_k}\nu^2(t)u^2(t) \leq ct^{-\frac{4}{3}+\gamma_k} := ct^{\beta_k},$$

ha $\gamma_k < \frac{1}{3}$ (ami S_1-ben teljesül), akkor $\beta_k < -1$. Így

$$S_1 = \sum_{\substack{k \\ \gamma_k < \frac{1}{3}}} \frac{c_k}{C^{\gamma_k+1}} \int_A^{\infty} t^{\gamma_k}\nu^2(t)u^2(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{\substack{k \\ \gamma_k < \frac{1}{3}}} \frac{c_k}{C^{\gamma_k+1}} \int_A^{\infty} c \cdot t^{\beta_k}\,\mathrm{d}t < K, \tag{49}$$

hiszen $A \geq 1$, $\beta_k < -1$, és a szumma véges. (48) és (49) szerint pedig $II. \leq S_1 + S_2 < \infty$.

Végül $I.$ becsléséhez ismét (41)-et használjuk, csak most az $x = -a$ választással. Ez esetben $x \in \left[-a, -\frac{1}{2}\right]$, így (39) szerint $|G(z)| \leq M$ igaz. Az előzőekhez hasonlóan adódik, hogy

$$\nu^2(t)u^2(t) \leq \frac{1}{4\pi^2} M^2 t^{2a-2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|(1+\mathrm{i}y)^2|}\,\mathrm{d}y\right)^2 = \frac{M^2}{4} t^{2a-2} = cM^2 t^{2a-2}.$$

Felhasználva, hogy $w(t) = \mu(t)\nu(t)$:

$$I. = \int_0^{\frac{A}{C}} \frac{u^2(Ct)\nu^2(Ct)}{\nu^2(t)\mu^2(t)}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{A}{C}} \frac{cM^2 t^{2a-2} C^{2a-2}}{\nu^2(t)\mu^2(t)}\,\mathrm{d}t \leq c \int_0^{\frac{A}{C}} \left(\frac{t^{a-1}}{\nu(t)}\right)^2 \mathrm{d}t < \infty,$$

hiszen folytonos függvény véges intervallumon vett integrálja véges.

Tehát (43) szerint $\|n\|_{2,w}^2 = I.+II. < \infty$, így $n \in L_w^2(0,\infty)$, ezért Riesz reprezentációs tétele értelmében minden $f \in L_w^2$ esetén tekinthetjük a következő lineáris funkcionált:

$$\Phi(f) = \int_0^\infty f(t)n(t)w^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Φ korlátos, ugyanis a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség szerint

$$|\Phi(f)| \le \|f\|_{2,w}\|n\|_{2,w}.$$

A bizonyítás utolsó lépéseként megmutatjuk, hogy Φ eltűnik $\{t^{\lambda_k}\ln^l t \mid l = 0,1,\ldots,\mu_k - 1\}_{k=1}^\infty$ elemein. Helyettesítéssel integrálva

$$\int_0^\infty t^{\lambda_k}\ln^l t\cdot\nu(Ct)u(Ct)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1}{C^{\lambda_k+1}}v^{\lambda_k}\ln^l\left(\frac{v}{C}\right)\nu(v)u(v)\,\mathrm{d}v =$$

$$= \frac{1}{C^{\lambda_k+1}}\int_0^\infty v^{\lambda_k}(\ln v - \ln C)^l\nu(v)u(v)\,\mathrm{d}v =$$

$$= \frac{1}{C^{\lambda_k+1}}\int_0^\infty v^{\lambda_k}\sum_{n=0}^{l}\binom{l}{n}\ln^n v(-\ln C)^{l-n}\nu(v)u(v)\,\mathrm{d}v =$$

$$= \frac{1}{C^{\lambda_k+1}}\sum_{n=0}^{l}\binom{l}{n}(-\ln C)^{l-n}\underbrace{\int_0^\infty v^{\lambda_k}\ln^n v\cdot\nu(v)u(v)\,\mathrm{d}v}_{III.}. \tag{50}$$

A 6. lemma n-szeri alkalmazásával adódik, hogy

$$\int_0^\infty v^z\ln^n v\cdot\nu(v)u(v)\,\mathrm{d}v = \int_0^\infty v^{z-1}\ln v\cdot(\ln^{n-1}v\cdot v\nu(v)u(v))\mathrm{d}v =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_0^\infty v^{z-1}\ln^{n-1}v\cdot v\nu(v)u(v)\,\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_0^\infty v^z\ln^{n-1}v\cdot\nu(v)u(v)\,\mathrm{d}v =$$

$$= \ldots = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\int_0^\infty v^z\nu(v)u(v)\,\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\frac{G(z)}{(1+a+z)^2}.$$

Eszerint

$$III. = \int_0^\infty v^{\lambda_k}\ln^n v\cdot\nu(v)u(v)\,\mathrm{d}v = \left.\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\frac{G(z)}{(1+a+z)^2}\right|_{z=\lambda_k}.$$

Megmutatjuk, hogy $\left.\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\frac{G(z)}{(1+a+z)^2}\right|_{z=\lambda_k} = 0$ minden $n = 0,1,\ldots,l$, $l = 0,1,\ldots,\mu_k - 1$ esetén. Ehhez elegendő $G(z)$ deriváltjait vizsgálni, hiszen a Leibniz-szabály szerint

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\frac{G(z)}{(1+a+z)^2} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}G^{(k)}(z)((1+a+z)^{-2})^{(n-k)},$$

vagyis a kérdéses derivált λ_k-ban 0, ha $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} G(z)\big|_{z=\lambda_k} = 0$ minden $n = 0, \ldots, \mu_k - 1$-re.

Ugyanezen meggondolás miatt, $G(z)$ (34) definíciója szerint elegendő

$$H^*(z+a) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k - z}{\lambda_k + 2a + z} \right)^{\mu_k} e^{\frac{2(z+a)\mu_k}{\lambda_k + a}}$$

deriváltjait vizsgálni λ_k-kban.

$$H^{*\prime}(z+a) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{\frac{2(z+1)\mu_m}{\lambda_m + a}} \left(\frac{\lambda_m - z}{\lambda_m + 2a + z} \right)^{\mu_m - 1} \frac{-2\mu_m (a+z)^2}{(\lambda_m + 2a + z)^2 (\lambda_m + a)} \cdot$$
$$\cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k - z}{\lambda_k + 2a + z} \right)^{\mu_k} e^{\frac{2(z+1)\mu_k}{\lambda_k + a}}.$$

Látható, hogy adott λ_m esetén, melynek multiplicitása μ_m, a deriválások során keletkező tagokban $\left(\frac{\lambda_m - z}{\lambda_m + 2a + z} \right)$ multiplicitása vagy nem változik, vagy eggyel csökken. Így ha n-szer deriválunk, mivel $n = 0, 1, \ldots, l$, és $l = 0, 1, \ldots, \mu_m - 1$, minden tagban lesz olyan $\left(\frac{\lambda_m - z}{\lambda_m + 2a + z} \right)$ tényező, melynek multiplicitása az $1, 2, \ldots, \mu_m$ számok valamelyike, ezért tetszőleges λ_k helyen

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} H^{*\prime}(z+a) \bigg|_{z=\lambda_k} = 0.$$

Ekkor a fentiek szerint $G(z)$ deriváltjai is 0-k λ_k-kban, végső soron tehát

$$III. = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} \frac{G(z)}{(1+a+z)^2} \bigg|_{z=\lambda_k} = 0$$

minden $k = 1, 2, \ldots$, $n = 0, 1, \ldots, l$ esetén. Tehát $III. = 0$, így (50)-nel egybevetve

$$\int_0^{\infty} t^{\lambda_k} \ln^l t \cdot n(t) w^2(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{C^{\lambda_k + 1}} \sum_{n=0}^{l} \binom{l}{n} (-\ln C)^{l-n} \cdot III. = 0$$

adódik. ϕ tehát olyan lineáris funkcionál, mely teljesíti az F. tétel feltételeit, így S nem sűrű. □

A bizonyítás során használt lemma:

8. Lemma. *Legyen* $\mathbf{A} = \{a_n\} \in \mathbf{L}(c, D)$, *és* $\mathbf{B} = \{b_n\} \in \mathbf{A}_{\alpha,\beta}$. *Ekkor* $a \geq 0$ *esetén az* $\mathbf{A}' = \{a_n + a\}$ *sorozatra is igaz, hogy* $\mathbf{A}' \in \mathbf{L}(c, D)$, *illetve a hasonlóan képezett* $\mathbf{B}' = \{b_n + a\}$ *sorozatra is igaz, hogy* $\mathbf{B}' \in \mathbf{A}'_{\alpha,\beta}$.

Bizonyítás: $\mathbf{A}' = \{a_n + a\} \in \mathbf{L}(c, D)$, mivel $\{a_n + a\}$ növekvő és pozitív, illetve

$$(a_{n+1} + a) - (a_n + a) = a_{n+1} - a_n \geq c > 0,$$

hiszen $\{a_n\} \in \mathbf{L}(c, D)$, azaz (6) feltétel teljesül.

Másrészt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_n+a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{a_n}{n}+\frac{a}{n}}=\frac{1}{\frac{1}{D}+0}=D,$$

azaz (7) feltétel is igaz: $\mathbf{A}'\in\mathbf{L}(c,D)$.

Nézzük most $\mathbf{B}'=\{b_n+a\}$-t. Felhasználva, hogy $\mathbf{B}\in\mathbf{A}_{\alpha,\beta}$:

$$|(b_n+a)-(a_n+a)|=|b_n-a_n|\le a_n^\alpha\le(a_n+a)^\alpha,$$

mivel $0<\alpha<1$, és x^α szigorúan monoton nő. Azaz b_n+a az a_n+a $(a_n+a)^\alpha$ sugarú zárt környezetén belül van, vagyis teljesül (8) feltétel.

Emellett $m\ne n$ esetén, ha $b_m=b_n\Leftrightarrow b_m+a=b_n+a$, vagy ha nem egyenlők:

$$|(b_m+a)-(b_n+a)|=|b_m-b_n|\ge\max\left\{e^{-a_m^\beta},e^{-a_n^\beta}\right\}. \tag{51}$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $a_m>a_n$, ekkor $e^{-a_m^\beta}<e^{-a_n^\beta}$, vagyis $\max\left\{e^{-a_m^\beta},e^{-a_n^\beta}\right\}=e^{-a_n^\beta}$. Másrészt ekkor $a_m+a>a_n+a$, amiből $e^{-(a_m+a)^\beta}<e^{-(a_n+a)^\beta}$, azaz $\max\left\{e^{-(a_m+a)^\beta},e^{(-a_n+a)^\beta}\right\}=e^{-(a_n+a)^\beta}$. Mivel $a_n+a\ge a$ is igaz, ezért $e^{-(a_n+a)^\beta}\le e^{-a_n^\beta}$. A fentiek szerint tehát (51) tovább írható:

$$|(b_m+a)-(b_n+a)|\ge e^{-a_n^\beta}\ge e^{-(a_n+a)^\beta}=\max\left\{e^{-(a_m+a)^\beta},e^{(-a_n+a)^\beta}\right\},$$

amiből adódik (9). □

Igazolom az E. tétel multiplicitással vett változatát:

2. Tétel. *Legyen w pozitív és folytonos $(0,\infty)$-en úgy, hogy w^2 momentumai végesek (azaz teljesül (1) feltétel), $\mathbf{A}=\{a_k\}\in\mathbf{L}(c,D)$, $\mathbf{B}=\{b_n\}\in\mathbf{A}_{\alpha,\beta}$, melynek (λ,μ) átrendezettje $\{\lambda_n,\mu_n\}$. Ha létezik monoton növekvő h függvény $[0,\infty)$-en, melyre*

- *létezik $0<C,E$, hogy*

$$C<\frac{h(r)}{h(r_1)}<E,\ \text{amint}\ \frac{1}{2}\le\frac{r}{r_1}\le 2; \tag{52}$$

- *létezik $\alpha,C,c>0$, hogy minden $0<x\le r$ esetén*

$$0<h(r)\le C^{\frac{1}{x}}\frac{cx}{\varphi^\alpha(x)}\Psi_\Lambda^\alpha(r); \tag{53}$$

- *valamint*

$$\int_1^\infty\frac{h(r)}{r^2}\,\mathrm{d}r=\infty, \tag{54}$$

akkor

$$S=\operatorname{span}\{t^{\lambda_k}\ln^l t\mid l=0,1,\dots,\mu_k-1\}_{k=1}^\infty$$

sűrű $L_w^2(0,\infty)$-en.

Bizonyítás: Tegyük fel indirekt, hogy S nem sűrű $L^2_w(0,\infty)$-en. Ekkor az F. tétel szerint létezik $\phi \in L_2^{w*}(0,\infty)$ korlátos lineáris funkcionál, amely $\{t^{\lambda_k}\ln^l t \mid l = 0,1,\ldots,\mu_k - 1\}_{k=1}^{\infty}$ elemein nullává válik. A Riesz-reprezentációs tétel szerint ekkor létezik $\hat{h}$ nem azonosan 0 függvény, hogy $h \in L^2_w$, és ϕ a következő alakban írható:

$$\phi(f) = \int_0^\infty f(t)\hat{h}(t)w^2(t)\,\mathrm{d}t \tag{55}$$

A fentiek szerint ekkor

$$\int_0^\infty t^{\lambda_k}\ln^l t \cdot \hat{h}(t)w^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

minden $l = 0,1,\ldots,\mu_k - 1$, $k = 1,2,\ldots$ esetén. Speciálisan, a $\Re z = x \geq 0$ tartományon definiált reguláris

$$G(z) := \int_0^\infty t^z\hat{h}(t)w^2(t)\,\mathrm{d}t \tag{56}$$

is teljesíti a

$$G(\lambda_k) = 0,$$

$k = 1,2,\ldots$ egyenlőségeket. A Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség szerint

$$|G(z)| \leq \left(\int_0^\infty \hat{h}^2(t)w^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty |t^z|^2w^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} = \|\hat{h}\|_{2,w}\varphi^x(x), \tag{57}$$

hiszen $|t^z| = t^x$, valamint felhasználtuk (12)-t.

Definiáljuk $\Re z = x \geq 0$-n a következő függvényt:

$$g(z) := \frac{G(z)}{H(z)C_1^{z+1}}, \tag{58}$$

ahol H továbbra is a következő:

$$H(z) = \prod_{k=1}^\infty \frac{b_k - z}{b_k + z}e^{\frac{2z}{b_k}} = \prod_{k=1}^\infty \left(\frac{\lambda_k - z}{\lambda_k + z}\right)^{\mu_k} e^{\frac{2z\mu_k}{\lambda_k}},\ \text{ha } \Re z = x \geq 0.$$

A 4. lemma (20) következménye szerint ekkor létezik $C_2 > 0$, hogy

$$|H(z)| \geq (C_2\Psi_\Lambda(r))^x,\ \text{ha } \Re z \geq 0 \text{ és } |z - b_n| \geq \frac{e^{-a_n^\beta}}{3}, \tag{59}$$

azaz a $T = \{z \mid \Re z \geq 0\} \setminus \bigcup_{n=1}^\infty B\left(b_n, \frac{e^{-a_n^\beta}}{3}\right)$ tartományon ($B(a,r)$ jelöli az a középű, r sugarú nyílt gömböt). A gömbök nem feltétlenül diszjunktak, hiszen előfordulhat, hogy valamely $n \neq m$ esetén $b_n = b_m$. Emiatt Zikkos [24] cikkéhez hasonlóan fix n-re definiáljuk Γ_n indexhalmazt:

$$\Gamma_n = \{j \mid b_n = b_j\}.$$

Ekkor

$$\bigcup_{j\in\Gamma_n} B\left(b_j, \frac{e^{-a_j^\beta}}{3}\right) = B\left(b_n, \frac{e^{-a_{k_n}^\beta}}{3}\right), \text{ ahol } k_n = \min\{m \mid m \in \Gamma_n\},$$

ugyanis $e^{-a_j^\beta} \le e^{-a_{k_n}^\beta}$ minden $j \in \Gamma_n$ esetén. Ezzel az átírással már mondhatjuk, hogy (59) igaz $\Re z \ge 0$ tartományon, a fenti diszjunkt gömbök unióján kívül.

Ekkor $g(z)$-t (57) és (59) segítségével becsülhetjük:

$$|g(z)| = \frac{|G(z)|}{|H(z)| \cdot |C_1^{z+1}|} \le \frac{\|\hat{h}\|_{2,w}\varphi^x(x)}{(C_2\Psi_\Lambda(r))^x|C_1^{x+1}|} \le \left(C\frac{\varphi(x)}{\Psi_\Lambda(r)}\right)^x, \text{ ha } z \in T. \tag{60}$$

De g reguláris $\Re z \ge 0$-n, így a maximum-elv szerint (60) egyenlőtlenség igaz egész $\Re z \ge 0$-n.

Ha viszont egy $g(z)$ függvény reguláris $\Re z = x \ge 0$-n, és teljesíti (60) egyenlőtlenséget, akkor $g \equiv 0$. Ha ugyanis $0 < x \le r$, akkor (53) szerint

$$\varphi(x) \le \Psi_\Lambda(r)\left(\frac{C^{\frac{1}{x}}cx}{h(r)}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

így (60) alapján

$$|g(z)| \le C\left(\frac{cx}{h(r)}\right)^{\frac{x}{\alpha}},$$

és a 2. Fuchs-lemma szerint $g \equiv 0$, ha pedig $x \to 0+$, akkor $\varphi(x)$ (12) definíciója szerint

$$\lim_{x\to 0+}\left(c\frac{\varphi(x)}{\Psi_\Lambda(r)}\right)^x = \lim_{x\to 0+} c^x\frac{1}{\Psi_\Lambda^x(r)}\left(\int_0^\infty t^{2x}w^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} = \|w(t)\|_{2,(0,\infty)},$$

így mindenképpen létezik C konstans, hogy

$$\left(\frac{\varphi(x)}{\Psi_\Lambda(r)}\right)^x \le C\left(\frac{cx}{h(r)}\right)^{\frac{x}{\alpha}}, \text{ ha } \Re z = x \ge 0,$$

és a 2. lemma szerint $g \equiv 0$.

Ha viszont $g \equiv 0$, akkor (58) szerint $G \equiv 0$ minden z-re. (56) szerint ekkor $\hat{h}(t) \equiv 0$, így (55) alapján $\phi(f) \equiv 0$ minden $f \in L_w^2$ esetén, ami ellentmondás, hiszen ϕ-ről feltettük, hogy nem a triviális funkcionál.

Így a kezdeti feltevésünk helytelen volt, vagyis S sűrű. □

Az 1. és a 2. tételek következménye a következő "akkor és csak akkor" típusú állítás:

3. Tétel. *Legyen w megengedett és normális súlyfüggvény $(0,\infty)$-n, $\mathbf{A} = \{a_n\} \in \mathbf{L}(c, D)$, $\mathbf{B} = \{b_n\} \in \mathbf{A}_{\alpha,\beta}$, melynek (λ, μ) átrendezettje $\Lambda = \{\lambda_n, \mu_n\}$. Tegyük fel továbbá, hogy létezik $h(r)$ monoton növekvő függvény $[0,\infty)$-en, melyre*

- *létezik $0 < C, E$, hogy*

$$C < \frac{h(r)}{h(r_1)} < E, \text{ amint } \frac{1}{2} \le \frac{r}{r_1} \le 2;$$

- *létezik $\alpha, C, c, k > 0$, hogy minden $0 < x \le r$ esetén*

$$\frac{1}{k} x \ln \frac{\Psi_\Lambda(r)}{\varphi(x)} \le h(r) \le C^{\frac{1}{x}} \frac{cx}{\varphi^\alpha(x)} \Psi_\Lambda^\alpha(r). \tag{61}$$

Ekkor

$$S = \operatorname{span}\{t^{\lambda_k} \ln^l t \mid l = 0, 1, \ldots, \mu_k - 1\}_{k=1}^\infty$$

akkor és csak akkor sűrű $L_w^2(0,\infty)$-n, ha

$$\int_0^\infty \frac{h(r)}{r^2} \,\mathrm{d}r = \infty. \tag{62}$$

Bizonyítás: $\Leftarrow$: A 2. tétel bizonyítása működik.

$\Rightarrow$: Legyen $f(r) = k \cdot h(r)$. Ha S sűrű, akkor az 1. tétel feltételei közül legalább az egyik nem teljesül. De (61) miatt (26) igaz, ezért (27) nem teljesülhet, ez viszont éppen (62) helyességét jelenti. $\square$

A 2. tétel nem használta ki L_w^2 Hilbert-tér voltát, így egyszerűen általánosítható $L_w^p(0,\infty)$, $1 \le p < \infty$ és $C_w(0,\infty)$ terekre is. Ehhez φ megfelelő definíciói:

$$\varphi_p(x) := \left(\int_0^\infty t^{px} w^p(t) \,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{px}}, \ x > 0, \ 1 \le p < \infty;$$

illetve

$$\varphi_C(x) = \left(\sup_{t>0} t^x w(t) \right)^{\frac{1}{x}}, \ x > 0.$$

A terek definíciói a szokásosak:

$$L_w^p(0,\infty) = \{f \mid \|fw\|_{p,(0,\infty)} < \infty\},$$

valamint

$$C_w(0,\infty) = \left\{ f \in C(0,\infty) \mid \lim_{t \to 0+,\infty} f(t)w(t) = 0 \right\}.$$

Ekkor igaz a következő (zárójelben a C_w-eset):

4. Tétel. *Legyen w pozitív és folytonos súlyfüggvény $(0,\infty)$-en, és tegyük fel, hogy $t^x w(t) \in L^p(0,\infty)$ (minden $a > 0$-ra $\lim_{t\to 0+,\infty} t^a w(t) = 0$). Legyen $\mathbf{A} = \{a_n\} \in \mathbf{L}(c, D)$, $\mathbf{B} = \{b_n\} \in \mathbf{A}_{\alpha,\beta}$. Ekkor, ha létezik monoton növekvő h függvény $(0,\infty)$-en, amely teljesíti (52) és (54) feltételeket, valamint létezik $\alpha, C, c > 0$, hogy minden $0 < x \le r$ esetén*

$$0 < h(r) \le C^{\frac{1}{x}} \frac{cx}{\varphi_p^\alpha(x)} \Psi_\Lambda^\alpha(r) \quad \left(0 < h(r) \le C^{\frac{1}{x}} \frac{cx}{\varphi_C^\alpha(x)} \Psi_\Lambda^\alpha(r) \right),$$

akkor

$$S = \{t^{\lambda_k} \ln^l t \mid l = 0, 1, \ldots, \mu_k - 1\}_{k=1}^\infty$$

sűrű $L_w^p(0,\infty)$-en ($C_w(0,\infty)$-en).

4. Összefoglalás, kitekintés

Müntz-típusú tételeket bizonyítottunk súlyozott $L_2(0, \infty)$ téren az

$$S = \{t^{\lambda_k} \ln^l t \mid l = 0, 1, , \mu_k - 1\}_{k=1}^{\infty}$$

altérre vonatkozólag, ahol $\{\lambda_k, \mu_k\}$ egy multiplicitással ellátott sorozat, mely adott $\mathbf{A} \in \mathbf{L}(c, D)$ osztályból definiált $\mathbf{B} \in \mathbf{A}_{\alpha,\beta}$ sorozat (λ, μ) átrendezettje, w pedig megengedett súlyfüggvény. Ezzel G. Horváth Ágota [11] eredményeinek megfelelőit bizonyítottuk sorozatok egy multiplicitással ellátott osztályára.

Megfelelő helyettesítéssel Zikkos [24] eredményeihez hasonló tételeket kapunk, az újdonság azonban az, hogy Zikkos $e^{-w(t)}$ alakú súlyfüggvényeiben $w(t)$ konvexsége szükséges a tételek igazolásához, az itteni tételeknél pedig ez nem kell.

A 2. tétel kimondható $L^p_w(0, \infty)$ és $C_w(0, \infty)$ téren is, az 1. tétel azonban csak $L^2_w(0, \infty)$ téren igazolt, ugyanis a bizonyítás használja a 7. lemmát, vagyis a Mellin-transzformációra vonatkozó Parseval-egyenlőséget, melyhez szükséges L^2 (Hilbert-) térben lennünk. A továbbiakban ezért célszerű lesz megvizsgálni a tétel általánosabb eszközökkel való belátását, hogy ezzel esetleg igazoljuk $L^p_w(0, \infty)$, illetve $C_w(0, \infty)$-beli változatait is.

Ugyancsak az 1. tétel használja a ,,normális" súlyfüggvény fogalmát, melyet a klasszikus súlyfüggvények teljesítenek, jó lenne azonban a tételt pusztán megengedett súlyfüggvényekkel bizonyítani.

Hivatkozások

[1] J. M. Almira, *Müntz-type Theorems*, Surveys in Approximation Theory **3** (2007), 152–194.

[2] G. V. Badalyan, *On a Theorem of Fuchs*, Mat. Zametki **5** (1969), no. 6, 723–731.

[3] S. N. Bernstein, *Sur lesrecherches récentes a la meilleure approximation des fonctions continues par les polynômes*, Proc. of 5th Inter. Math. Congress **1** (1912), 256–266.

[4] D. Bhatta and L. Debnath, *Integral Transforms and Their Applications*, Chapman & Hall/CRC, 2007.

[5] R. P. Boas and H. Pollard, *Properties Equivalent to the Completeness of* $\{e^{-t}t^{\lambda_n}\}$, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), no. 4, 348–351.

[6] P. Borwein and T. Erdélyi, *The full Müntz Theorem in* $C[0, 1]$ *and* $L_1[0, 1]$, J. London Math. Soc. **54** (1996), 102–110.

[7] G. T. Deng, *Incompleteness and Closure of a Linear Span of Exponential System in a Weighted Banach Space*, J. Approx. Theory **125** (2003), 1–9.

[8] T. Erdélyi and W. B. Johnson, *The full Müntz Theorem in* $L_p(0, 1)$ *for* $0 < p < \infty$, J. Anal. Math. **84** (2001), 145–152.

[9] W. H. J. Fuchs, *On the Closure of* $\{e^{-t}t^{\alpha_\nu}\}$, Proc. Cambr. Phil. Soc. **42** (1946), 91–105.

[10] D. Guzzetti, G. Mantica, and S. Vaienti, *The Asymptotic Behaviour of the Fourier Transforms of Orthogonal Polynomials I-II, Mellin Transform Techniques, L.I.F.S. Measures and Quantum Mechanics*, Annales Henri Poincaré **8** (2006), no. 2, 256–300, 301–336.

[11] Á. P. Horváth, *Müntz-type Theorems on the Half-line with Weights*, (arXiv: 1009.5777).

[12] R. W. Howell and J. H. Mathews, *Complex Analysis for Mathematics and Engineering*, J. and B. Publishers, 1997.

[13] L. Knockaert, *Equivalent formulations of the Müntz-Szász completeness condition for systems of complex exponentials*, J. of the Franklin Institute **339** (2002), 103–109.

[14] A. Kroó, *A geometric approach to the multivariate Müntz problem*, Proc. of the Am. Math. Soc. **121** (1994), no. 1, 199–208.

[15] A. Kroó and J. Szabados, *On Weighted Approximation by Lacunary polynomials and Rational Functions on the Half-axis*, East J. on Approx. **2** (1996), no. 3, 289–300.

[16] A. F. Leontev, *On the Problem of the Completeness on a System of Powers on the Semi-axis, Russian*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Matem. **26** (1962), no. 5.

[17] P. Malliavin, *Sur quelques procédés d'extrapolation*, Acta Math **93** (1955), 179–255.

[18] Ch. H. Müntz, *Über den Approximationssatz von Weierstrass*, H. A. Schwarz's Festschrift, Berlin (1914), 303–312.

[19] F. Riesz and B. Sz.-Nagy, *Functional Analysis*, Dover Publications, Inc, 1990.

[20] Ú. F. Stefánsson, *Asymptotic Behavior of Müntz Orthogonal Polynomials*, Constructive Approximation **32** (2009), no. 2, 193–220.

[21] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, vol. XXIII, Amer. Math. Soc. Publ., 1975.

[22] B. V. Vinnitskii and A. V. Shapovalovskii, *A Remark on the completeness of Systems of Exponentials with Weight in $L_2(\mathbb{R})$*, Ukrainian Math. J. **52** (2000), no. 7, 1002–1009.

[23] X. Yang, *On the completeness of the system $\{z^{\lambda_n}\log^{m_n} z\}$ in L_a^2, (manuscript).*

[24] E. Zikkos, *Completeness of an Exponential System in Weighted Banach Spaces and Closure of its Liner Span*, J. Approx. Theory **146** (2007), 115–148.