A számtani-mértani közép közti egyenlőtlenség

Markó Zoltán

2009. január 5.

1. Definíció (számtani közép). *n nemnegatív egész szám* számtani közepének *nevezzük az*

$$A(n) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n}$$

számot.

2. Definíció (mértani közép). *n nemnegatív egész szám* mértani közepének *nevezzük a*

$$G(n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \prod_{i=1}^{n} \sqrt[n]{a_i}$$

számot.

E két nevezetes közép között teljesül a

3. Tétel (Számtani-mértani közép közti egyenlőtlenség). *n pozitív egész szám számtani és mértani közepére*

$$G(n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = A(n).$$

Bizonyítás: A bizonyításhoz a *Jensen-egyenlőtlenség* diszkrét formáját használjuk fel. Eszerint, ha egy függvény konkáv egy adott intervallumon, és az intervallumnak $a_1, a_2, \ldots, a_n$ belső pontjai, valamint $p_1, p_2, \ldots, p_n$ pozitív számok, melyekre $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, akkor

$$f(p_1 a_1 + p_2 a_2 + \ldots + p_n a_n) \geq p_1 f(a_1) + p_2 f(a_2) + \ldots + p_n f(a_n).$$

Tekintsünk most egy tetszőleges, 1-nél nagyobb alapú logaritmusfüggvényt, ez egész értelmezési tartományában konkáv. Akkor válasszuk p_i-ket ($i = 1, \ldots, n$) úgy, hogy

$$p_i = \frac{1}{n}$$

legyen, ez a p_i-kre vonatkozó feltételt teljesíti. Ezzel a választással a Jensen-egyenlőtlenség a logaritmusfüggvényre a következő alakot ölti:

$$\log\left(\frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n} + \ldots + \frac{a_n}{n}\right) \geq \frac{\log a_1}{n} + \frac{\log a_2}{n} + \ldots + \frac{\log a_n}{n}$$

A logaritmus azonosságait felhasználva, ez ekvivalens a következő egyenlőtlenséggel:

$$\log\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right) \geq \log \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

Mivel a logaritmusfüggvény monoton, ezért

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

ami a bizonyítandó állítás. $\square$