A Stirling-formula

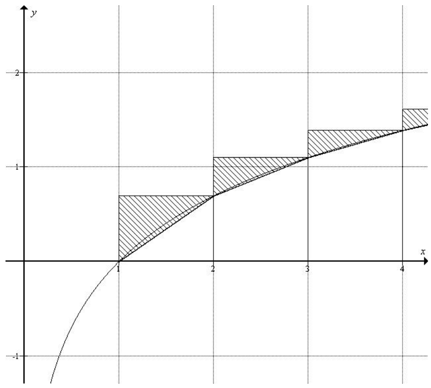
Markó Zoltán

2009. július 2.

Az $n!$ numerikus közelítése sokszor fontos a kombinatorikai feladatokban, most erre mutatunk egy formulát. Használjuk a $\sim$: *aszimptotikusan egyenlő* jelölést: két függvény aszimptotikusan egyenlő, ha hányadosuk végtelenben vett határértéke 1.

1. Tétel (Stirling-formula). $n! \sim \sqrt{2n\pi} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n.$

Bizonyítás: Tekintsük az $f(x) = \ln x$ függvényt, ha $x \geq 1$ és az 1. ábrát.



1. ábra.

A függvény alatti terület (melyet egy integrál ad meg) felülről becsülhető a köréírt, egységnyi alapú téglalapok területének összegével:

$$\int_1^n \ln x \,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=2}^{n} \ln k = \ln n!$$

Egy téglalap területe felülről becsülhető a görbe alatti terület, illetve a színezett háromszög területének összegével, így

$$\ln n! \leq \int_1^n \ln x \,\mathrm{d}x + \sum_1^n \text{háromszögek} = n\ln n - n + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{(\ln k - \ln(k-1)) \cdot 1}{2} =$$

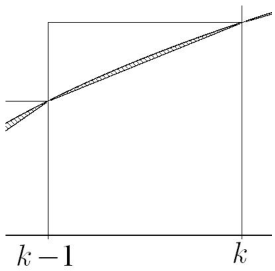
$$n \ln n - n + 1 + \frac{1}{2}\ln n.$$

Nevezzük félholdaknak azon síkidomokat, melyeket a háromszögek a függvény alatti területből metszenek le. A félholdak területének összegét megkapjuk, ha az előbb kapott összegből levonjuk a téglalapok területének összegét:

$$R_n = \sum_{1}^{n} \text{félholdak} = n \ln n - n + 1 + \frac{1}{2} \ln n - \ln n! = 1 + \ln \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{n}}{n!}.$$

Ahogy n nő, egyre több félhold adódik össze, így R_n monoton nő. Megmutatjuk, hogy korlátos.

Legyen a_k a k. félhold területe. a_k megkapható, mint a függvénygörbe alatti terület és a 2. ábrán látható trapéz területének különbsége:



2. ábra.

$$0 \leq a_k \leq \int_{k-1}^{k} \ln x - \frac{(\ln k + \ln(k-1)) \cdot 1}{2} = k \ln k - k - (k-1) \ln(k-1) + k - 1 - \frac{\ln k + \ln(k-1)}{2} =$$

$$\ln k^{k-\frac{1}{2}} - \ln(k-1)^{k-\frac{1}{2}} - 1 = \ln \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{e} = \ln \frac{\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{k-1}}{e} \cdot \sqrt{\frac{k}{k-1}}.$$

A kapott eredmény pozitív, ezért $\ln \frac{\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{k-1}}{e} \cdot \sqrt{\frac{k}{k-1}} > 1$.

Mivel $\ln(1 + x) \leq x$ minden x-re, ezért

$$a_k = \ln \frac{\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{k-1}}{e} \cdot \sqrt{\frac{k}{k-1}} =$$

$$\ln \left(1 + \frac{\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{k-1}}{e} \cdot \sqrt{\frac{k}{k-1}} - 1\right) \leq \underbrace{\frac{\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{k-1}}{e} \cdot \sqrt{\frac{k}{k-1}} - 1}_{*}$$

A továbbiakban $*$-ot alakítjuk:

$$* = \frac{\sqrt{\frac{k}{k-1}}}{e}\left(\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}\cdot 1 - e\sqrt{\frac{k-1}{k}}\right) =$$

$$\frac{\sqrt{\frac{k}{k-1}}}{e}\underbrace{\left[\left(\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1} - e\right) + e\left(1-\sqrt{\frac{k-1}{k}}\right)\right]}_{**}.$$

Ekkor $** = \underbrace{e\left(1-\sqrt{\frac{k-1}{k}}\right)}_{A} - \underbrace{\left(e-\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}\right)}_{B}$. Külön becsüljük A-t és B-t:

$$A = e\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}} = e\frac{1}{\sqrt{k}(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})} = \frac{e}{2k} + e\left(\frac{1}{\sqrt{k}(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})} - \frac{1}{2k}\right).$$

Mivel

$$\frac{1}{\sqrt{k}(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{\sqrt{k}}\left[\frac{1}{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}} - \frac{1}{2\sqrt{k}}\right] =$$

$$\frac{-\sqrt{k-1}}{k(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})} = \frac{1}{2k(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})^2} = o\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

$\frac{1}{k^2}$ nagyságrendű mennyiség. Így tehát $A = \frac{e}{2k} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$.

Nézzük most B-t. $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!} = e$, valamint a binomiális tételből $\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1} = \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}\frac{1}{(k-1)^j}$. Így B a következőképpen alakítható:

$$B = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!} - \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}\frac{1}{(k-1)^j} = \underbrace{\sum_{j=2}^{k-1}\left(1-\frac{(k-2)(k-3)\cdots(k-j)}{(k-1)^{j-1}}\right)\frac{1}{j!}}_{***} + \sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{j!}.$$

Tudjuk, hogy $\sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{j!} \le \frac{1}{k!k} = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$.

Megmutatjuk, hogy $***$ is $\dfrac{1}{k^2}$ nagyságrendű:

$$***=\sum_{j=2}^{k-1}\frac{(k-1)^{j-1}-(k-1-1)(k-1-2)\cdots(k-1-(j-1))}{(k-1)^{j-1}}\cdot\frac{1}{j!}=$$

$$\sum_{j=2}^{k-1}\frac{(k-1)^{j-1}-[(k-1)^{j-1}+(-1-2-\ldots-(j-1))(k-1)^{j-2}+o(k-1)^{j-3}]}{(k-1)^{j-1}}=$$

$$\frac{1}{2(k-1)}\sum_{j=2}^{k-1}\underbrace{\frac{j(j-1)}{j!}}_{\frac{1}{(j-2)!}}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)=\frac{1}{2(k-1)}\sum_{j=0}^{k-3}\frac{1}{j!}+o\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Így

$$**=A-B=\frac{e}{2k}-\frac{1}{2(k-1)}\sum_{j=0}^{k-3}\frac{1}{j!}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)=$$

$$o\left(\frac{1}{k^2}\right)+\frac{1}{2}\left[e\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k-1}\right)+\frac{1}{k-1}\left(e-\sum_{j=0}^{k-3}\frac{1}{j!}\right)\right]=o\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

mivel $e\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k-1}\right)=o\left(\frac{1}{k^2}\right)$, és mivel $e-\sum_{j=0}^{k-3}\frac{1}{j!}\leq\frac{1}{(k-2)(k-2)!}$, ezért ez a tag is $\dfrac{1}{k^2}$ nagyságrendű.

Így tehát létezik k-tól független c, hogy

$$a_k\leq *=\frac{\sqrt{\frac{k}{k-1}}}{e}\cdot(A-B)\leq\frac{c}{k^2}.$$

Akkor pedig

$$R_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\leq\sum_{k=1}^{n}*_k\leq c\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k^2},$$

ami véges, így tehát R_n felülről korlátos. Mivel monoton és korlátos, ezért konvergens, $R_n\to R$, és akkor $R_n-1\to R-1$, és $e^{R_n-1}\to e^{R-1}=D$. Tehát

$$e^{R_n-1}=b_n=\left(\frac{n}{e}\right)^n\frac{\sqrt{n}}{n!}\to D.$$

Ha $b_n\to D$, akkor $\dfrac{b_n^2}{b_{2n}}\to\dfrac{D^2}{D}=D$. Így

$$\frac{b_n^2}{b_{2n}}=\frac{\frac{n^{2n}}{e^{2n}}\cdot\frac{n}{n!^2}}{\frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}\cdot\frac{\sqrt{2n}}{(2n)!}}=\frac{(2n)!}{((2n)!!)^2}\cdot\sqrt{\frac{n}{2}}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\sqrt{\frac{n}{2}}=$$

$$\frac{(2n-1)!!\sqrt{2n-1}}{(2n)!!}\cdot\sqrt{\frac{n}{2(2n+1)}}.$$

A Wallis-formula szerint $\dfrac{(2n-1)!!\sqrt{2n-1}}{(2n)!!} \to \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$, illetve mivel $\dfrac{n}{2(2n+1)} \to \dfrac{1}{4}$, ezért végül is

$$\frac{b_n^2}{b_{2n}} \to \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

azaz $b_n = \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \dfrac{\sqrt{n}}{n!} \to \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, amiből $n! \sim \sqrt{2n\pi} \cdot \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ adódik. □