Nevezetes határértékek

Markó Zoltán

2010. május 26.

A határérték definíciója, valamint a konvergenciakritériumok segítségével könnyen megállapíthatjuk a következő nevezetes sorozatok határértékeit.

1. Állítás. *$\alpha \in \mathbb{R}$, $a_n = n^\alpha$ sorozat esetén* $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha =$

- ∞, *ha* $\alpha > 0$;
- 1, *ha* $\alpha = 0$;
- 0, *ha* $\alpha < 0$.

Bizonyítás: elég $\alpha > 0$-t:

$$n^\alpha > K \Leftrightarrow n > K^{\frac{1}{\alpha}}, N(K) = \left\lceil K^{\frac{1}{\alpha}} \right\rceil \text{ jó küszöbindex.} \square$$

2. Állítás. *$a_n = a^n$ sorozatnál:* $\lim\limits_{n\to\infty} a^n =$

- ∞, *ha* $a > 1$;
- 1, *ha* $a = 1$;
- 0, *ha* $|a| < 1$;
- *nem létezik, ha* $a \leq -1$.

Bizonyítás: elég $a > 1$-et igazolni.

$$a^n = (1+b)^n \overset{B}{>} 1 + nb \to \infty.$$

A minoráns kritériumot alkalmazva adódik az állítás. $\square$

3. Állítás. *$a_n = \sqrt[n]{a}$, $a > 0$ sorozatra:* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Bizonyítás: elég $a > 1$-re igazolni, mert ha $a < 1$, akkor $a = \frac{1}{b}$, és $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}} \to \frac{1}{1}$. Tehát, ha $a > 1$, akkor $\sqrt[n]{a} > 1$, így $\sqrt[n]{a} = 1 + b_n$. Megmutatjuk, hogy $b_n \to 0$. A Bernoulli-egyenlőtlenség szerint:

$$a = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n,$$

és így

$$\frac{a-1}{n} \geq b_n > 0.$$

Mivel a bal oldal 0-hoz tart, ezért alkalmazhatjuk a majoráns kritériumot, és így $b_n \to 0$, azaz $a_n = \sqrt[n]{a} \to 1$. □

4. Állítás. *$a_n = \sqrt[n]{n}$ sorozat határértéke:* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Bizonyítás: először tekintsük a $\sqrt[2n]{n}$ sorozatot. Mivel $\sqrt[2n]{n} > 1$, ezért $\sqrt[2n]{n} = 1 + b_n$. Megmutatjuk, hogy $b_n \to 0$. Ismét a Bernoulli-egyenlőtlenséget használva:

$$\sqrt{n} = (1+b_n)^n \geq 1 + nb_n,$$

azaz

$$\frac{\sqrt{n}-1}{n} \geq b_n.$$

A bal oldal 0-hoz tart, így a majoráns kritérium szerint $b_n \to 0$, így $\sqrt[2n]{n} \to 1$, és ekkor $\sqrt[n]{n} \to 1$, mert $\sqrt[2n]{n} \to 1$ az $\sqrt[n]{n} \to 1$ sorozat részsorozata. □

5. Állítás. *$a_n = \sqrt[n]{n!}$ sorozat határértéke:* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \infty$.

Bizonyítás: Megmutatjuk, hogy $n^{\frac{n}{2}} \leq n!$. Ha ez kész, akkor

$$\sqrt[n]{n^{\frac{n}{2}}} = \sqrt{n} \leq \sqrt[n]{n!},$$

és mivel $\sqrt{n} \to \infty$, ezért a minoráns kritérium szerint az állítás adódik. Bizonyítandó tehát, hogy $n^{\frac{n}{2}} \leq n!$.

Ehhez teljes indukciót használunk. $n = 1$-re az állítás igaz: $\sqrt{1} \leq 1!$.

Tegyük fel, hogy tetszőleges n-re $n^{\frac{n}{2}} \leq n!$. Ekkor $n+1$-re kell igazolnunk, hogy

$$(n+1)^{\frac{n+1}{2}} \leq (n+1)!$$

Mindkét oldalt $(n+1)$-gyel osztva:

$$(n+1)^{\frac{n-1}{2}} \leq n!$$

Ha $(n+1)^{\frac{n-1}{2}} \leq n^{\frac{n}{2}}$, akkor az indukciós feltétel szerint az állítás igaz. Ez az egyenlőtlenség viszont könnyen igazolható pl. a binomiális tétel segítségével. Így az állítás igaz $n+1$-re, tehát az eredeti állítás is igaz. □

6. Állítás. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

Bizonyítás: Ha $|a| \leq 1$, akkor az állítás triviális. Tegyük fel hát, hogy $|a| > 1$, és $n > 1$. Ekkor

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot \dots \cdot a}{1 \cdot \dots \cdot n} \leq A(a) \cdot \frac{a}{n} \to 0,$$

ahol $A(a)$ a-tól függő kifejezés. □

7. Állítás. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0.$

Bizonyítás: $a_n = \dfrac{1\cdot\dots\cdot n}{n\cdot\dots\cdot n} < \dfrac{1}{n} \to 0$, így az állítás adódik a minoráns kritériumból. □

8. Állítás. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{n!} = 0.$

Bizonyítás: Az $\alpha \leq 0$ eset triviális. Tegyük fel, hogy $\alpha > 0$. Legyen ekkor $[\alpha] + 1 = k$, ahol $[\alpha]$ az α egészrésze. Akkor

$$a_n \leq \frac{n^k}{n!} = \frac{n\cdot\dots\cdot n}{1\cdot\dots\cdot(n-k+1)} \cdot \frac{1}{n-k} \cdots \frac{1}{1} < *$$

Az első tényezőben minden tényező kisebb 2-nél, ha $n > 2k$. Így a becslést tovább folytatva:

$$* < 2^k \frac{1}{n-k} \to 0,$$

és a minoráns kritériumból adódik az állítás. □

9. Állítás. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} =$

- 0*, ha* $|a| > 1$*;*
- ∞*, ha* $0 < a < 1$*;*
- *nem létezik, ha* $-1 \leq a < 0$*.*

Bizonyítás: $a > 1$ esetet bizonyítjuk. Írjuk át az n-edik tagot a következő alakba:

$$a_n = \left(\frac{\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^k}{a}\right)^n.$$

Mivel $n^{\frac{1}{n}} \to 1$, ezért $\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^k \to 1$. Ekkor létezik N, hogy ha $n > N$, akkor $\dfrac{n^{\frac{k}{n}}}{a} < 1 - \varepsilon$. Így

$$a_n < (1-\varepsilon)^n \to 0,$$

ha $n > N$, és a minoráns kritérium szerint így az állítás igaz. □

10. Állítás. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e.$

Bizonyítás: A sorozat határértékének létezését fogjuk igazolni, az e számot maga a sorozat határértéke definiálja. Megmutatjuk, hogy a sorozat monoton és korlátos.

(1) Korlátosság. Az nyilvánvaló, hogy alulról korlátos, mert minden értéke nemnegatív. A felső korlát kereséséhez felhasználjuk a binomiális tételt, majd az összeget felülről becsüljük:

$$0 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n} \cdot \underbrace{\frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{n\cdot \dots \cdot n}}_{<1} \cdot \frac{1}{k!} \leq$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} < 3.$$

Tehát $0 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$, azaz a sorozat korlátos.

(2) Növekedés: Ismét a binomiális tételt felhasználva felülről becsüljük az n-edik tagot:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!} \leq$$

$$\sum_{k=0}^{n} 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)\frac{1}{k!} =$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)\frac{1}{k!} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Tehát a sorozat monoton és korlátos, azaz konvergens. Mivel legkisebb értéke 2, de 3 felső korlátja, ezért $2 < e < 3$. □

Ez utóbbi nevezetes határérték sok hasonló típusú határérték kiszámítását lehetővé teszi, ez a következő állítás következménye.

11. Állítás. *Ha* $\lim_{n\to\infty} |r_n| = \infty$*,* $r_n \neq 0$ *és szigorúan monoton nő, akkor*

$$\left(1+\frac{1}{r_n}\right)^{r_n} \to e.$$

Bizonyítás: Elég $r_n \to \infty$-re, ugyanis ha $-r_n \to -\infty$, akkor

$$\left(1-\frac{1}{r_n}\right)^{-r_n} = \left(\frac{r_n}{r_n-1}\right)^{r_n} = \left(\frac{r_n-1}{r_n-1}+\frac{1}{r_n-1}\right)^{r_n-1}\left(1+\frac{1}{r_n-1}\right) =$$

$$\left(1+\frac{1}{r_n-1}\right)^{r_n-1}\left(1+\frac{1}{r_n-1}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Igazoljuk tehát $r_n \to \infty$ esetben. Ekkor

- ha $\{a_n\} \subset \{n\}$, akkor $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e.$
- ha $\{b_n\}$ olyan, hogy $\{a_n\}$ elemeit véges sokszor ismételjük, akkor $\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \to e.$

Legyen ezek után $[r_n] = a_n$, azaz $a_n \le r_n < a_{n+1}$. Ekkor

$$\left(1 + \frac{1}{a_{n+1}}\right)^{a_n} \le \left(1 + \frac{1}{r_n}\right)^{r_n} \le \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_{n+1}}.$$

A bal és jobb oldal határértéke egyaránt e, így a rendőr-elv miatt $\left(1 + \frac{1}{r_n}\right)^{r_n} \to e$. $\square$