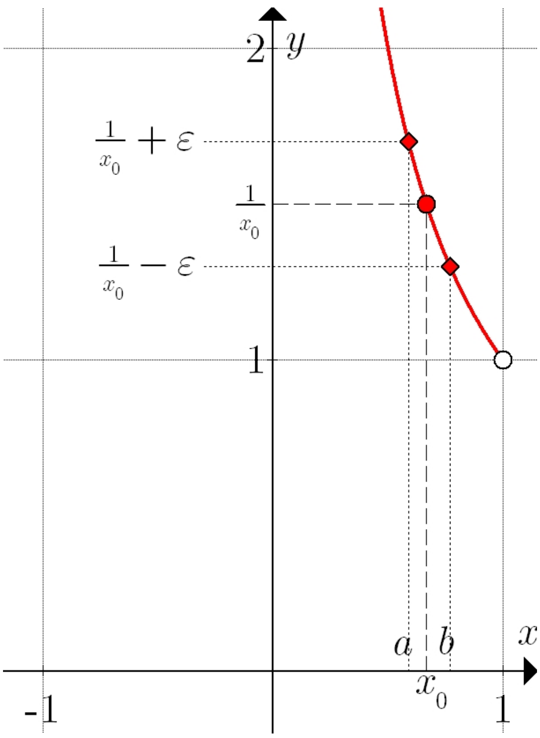
Egy $(0,1)$-en folytonos, de nem egyenletesen folytonos függvény

2012. november 9.

Tekintsük az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvényt $(0,1)$-en. Először is megmutatjuk, hogy ez folytonos minden $x_0 \in (0,1)$ esetén. Legyen $0 < x_0 < 1$ tehát fix, $\varepsilon > 0$ kicsi, előre adott. Az x_0-beli folytonosság definíciójához az kell, hogy létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$.

Vegyük hát az $\frac{1}{x_0}$ egy ε sugarú környezetét: $\left(\frac{1}{x_0} - \varepsilon, \frac{1}{x_0} + \varepsilon\right)$. Ezen intervallum f^{-1} általi képe $(a,b) = \left(\frac{x_0}{1+\varepsilon x_0}, \frac{x_0}{1-\varepsilon x_0}\right)$, lásd 1. ábra.



1. ábra.

Ez azt jelenti, hogy ha $x \in (a,b)$, akkor $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$. Mivel

$$b - x_0 = \frac{x_0}{1-\varepsilon x_0} - x_0 = \frac{x_0 - x_0 + \varepsilon x_0^2}{1-\varepsilon x_0} = \frac{\varepsilon x_0^2}{1-\varepsilon x_0},$$
$$x_0 - a = x_0 - \frac{x_0}{1+\varepsilon x_0} = \frac{x_0 + \varepsilon x_0^2 - x_0}{\frac{x_0}{1+\varepsilon x_0}} = \frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0},$$

és

$$\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0} < \frac{\varepsilon x_0^2}{1-\varepsilon x_0},$$

ezért legyen $\delta \leq \frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}$. Ekkor az x_0 δ sugarú környezete, vagyis az $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ intervallum része az (a,b) intervallumnak, vagyis ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $x_0, x \in (a,b)$, vagyis a fentiek szerint $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$.

Összefoglalva: Adott $x_0 \in (0,1)$ esetén, adott fix $\varepsilon > 0$-ra létezik δ, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$, vagyis f minden $x_0 \in (0,1)$ pontban folytonos. A kapott δ-ra azt kaptuk, hogy

$$\delta \leq \frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}. \tag{1}$$

Ezt a feltételt tehát adott x_0, ε esetén a definíciót teljesítő δ-nak tudnia kell.

f éppen emiatt viszont nem lesz egyenletesen folytonos $(0,1)$-en: ha indirekt egyenletesen folytonos lenne, akkor adott $\varepsilon > 0$-hoz létezne $\delta =: \delta(\varepsilon) > 0$, hogy minden $x_0 \in (0,1)$ esetén, ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$ teljesülne. Egy ilyen δ-val viszont a folytonosság definíciója is teljesül, vagyis ezen *univerzális*, az adott x_0 pont választásától független δ-nak tudnia kell minden egyes $x_0 \in (0,1)$ pontban az (1) feltételt.

Ha (1) minden $x_0 \in (0,1)$ esetén teljesül, akkor

$$\delta \leq \lim_{x_0 \to 0} \frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0} = \frac{\varepsilon \cdot 0^2}{1+\varepsilon \cdot 0} = 0.^{1}$$

Ez viszont ellentmondás, mert $\delta > 0$, így nem lehet ≤ 0, vagyis f nem lehet egyenletesen folytonos $(0,1)$-en.

[1]Itt tulajdonképpen azt használtuk ki, hogy (1) bal és jobb oldala is x_0 függvénye, a bal oldal konstans δ (az egyenletes folytonosság definíciójában szereplő δ univerzalitása éppen azt jelenti, hogy ez a δ minden x_0-ra ugyanaz a szám, tehát konstans). Könnyen látható, hogy ha $f(x) \leq g(x)$ két x-től függő függvényre, és f, g határértéke létezik x_0-ban, akkor $\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$.