Az n dimenziós gömb térfogata

Markó Zoltán

2009. július 2.

1. Példa. *Számítsuk ki az n dimenziós gömb térfogatát!*

Megoldás: Feladatunk egy n-es integrál meghatározása. Tekintsük a következő paraméterezést:

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\varphi_1 \\
x_2 &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\
x_3 &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3 \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= r\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1} \\
x_n &= r\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-1}
\end{aligned}$$

ahol $0 \le r \le R$, $0 \le \varphi_{n-1} \le 2\pi$, és $0 \le \varphi_k \le \pi$ minden $k = 1, \ldots, n-2$ esetén. A Jacobi-determináns:

$$J =$$

$$\begin{vmatrix}
\cos\varphi_1 & -r\sin\varphi_1 & 0 & \cdots & 0 \\
\sin\varphi_1\cos\varphi_2 & r\cos\varphi_1\cos\varphi_2 & -r\sin\varphi_1\sin\varphi_2 & \ddots & \vdots \\
\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3 & r\cos\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3 & r\sin\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3 & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -r\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-1} \\
\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-1} & r\cos\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-1} & r\sin\varphi_1\cos\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-1} & \cdots & r\sin\varphi_1\cdots\cos\varphi_{n-1}
\end{vmatrix} =$$

$$= r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cdot$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix}
\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & 0 & \cdots & 0 \\
\sin\varphi_1\cos\varphi_2 & \cos\varphi_1\cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 & \ddots & \vdots \\
\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3 & \cos\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3 & \cos\varphi_2\cos\varphi_3 & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\sin\varphi_{n-1} \\
\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-1} & \cos\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-1} & \cos\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-1} & \cdots & \cos\varphi_{n-1}
\end{vmatrix}}_{D_n}.$$

Belátható, hogy $D_n = \cos^2\varphi_1 D_{n-1} + \sin^2\varphi_1 D_{n-1} = D_{n-1} = \ldots = D_0 = 1$. Így tehát

$$|J| = r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1 \sin^{n-3}\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-2} = r^{n-1}\prod_{k=1}^{n-2}\sin^k\varphi_{n-k-1}.$$

Ha $n-k-1 =: j$, akkor az n-dimenziós gömb térfogatát megadó integrál:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^\pi r^{n-1}\prod_{k=1}^{n-2}\sin^k\varphi_j \,\mathrm{d}\varphi_j \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi_{n-1} = \underbrace{\int_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}\varphi_{n-1}}_{2\pi} \underbrace{\int_0^R r^{n-1}\,\mathrm{d}r}_{\frac{R^n}{n}} \prod_{k=1}^{n-2}\int_0^\pi \sin^k\varphi_j \,\mathrm{d}\varphi_j =$$

$$2\pi\frac{R^n}{n}\prod_{k=1}^{n-2}\int_0^\pi \sin^k\varphi_j \,\mathrm{d}\varphi_j.$$

Mivel

- ha $2 \mid k$, akkor $\displaystyle\int_0^\pi \sin^k\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{(k-1)!!}{k!!}\cdot\pi$,
- ha $2 \nmid k$, akkor $\displaystyle\int_0^\pi \sin^k\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{(k-1)!!}{k!!}\cdot 2$.

Így a térfogat függ a dimenziószám paritásától: ha n páros, akkor

$$V_1 = 2\pi\frac{R^n}{n}\cdot\frac{0!!}{1!!}\cdot 2\cdot\frac{1!!}{2!!}\cdot\pi\cdot\frac{2!!}{3!!}\cdot 2\cdots\frac{(n-3)!!}{(n-2)!!}\cdot\pi = \frac{R^n}{n!!}(2\pi)^{\frac{n-2}{2}+1} = \frac{R^n}{n!!}(2\pi)^{\frac{n}{2}}.$$

Ha pedig n páratlan, akkor

$$V_2 = 2\pi\frac{R^n}{n}\cdot\frac{0!!}{1!!}\cdot 2\cdot\frac{1!!}{2!!}\cdot\pi\cdot\frac{2!!}{3!!}\cdot 2\cdots\frac{(n-3)!!}{(n-2)!!}\cdot 2 = \frac{R^n}{n!!}\cdot 2\pi\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n-3}{2}} = \frac{R^n}{n!!}2^{\frac{n+1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}.$$

Speciálisan, $n=2$-re: $V = \dfrac{R^2}{2}\cdot 2\pi = R^2\pi$, a kör területe, illetve $n=3$-ra: $\dfrac{R^3}{1\cdot 3}\cdot 2^2\cdot\pi = \dfrac{4R^3\pi}{3}$, a három dimenziós gömb térfogata.