# A leszámlálások 12 alapesete

2009. május 4.

A következő módszerrel az összes alapvető leszámlálási feladat megoldását egyetlen táblázatban írhatjuk fel. Legyen $f : N \to X$ leképezés, ahol $N$ és $X$ rögzített véges halmazok, $|N| = n$, és $|X| = x$.

Számoljuk meg ezen $f$ leképezések mennyiségét aszerint, hogy milyen megkötéseink vannak $f$-re:

- nincs megkötés $f$-re;
- $f$ injektív;
- $f$ szürjektív.

A szemléletesség kedvéért $N$ elemei legyenek golyók, $X$ elemei pedig dobozok. Ekkor $f$ leképezés során a golyókat valamilyen megkötéssel a dobozokba pakoljuk. $f$ injektív, ha minden dobozban legfeljebb egy golyó lesz, $f$ szürjektív, ha minden dobozban legalább egy golyó lesz (azaz nincs üres doboz). Emellett további lehetőségeket ad, hogy a golyókat, illetve dobozokat megkülönböztetjük-e egymástól:

1. különböző golyók, különböző dobozok;
2. egyforma golyók, különböző dobozok;
3. különböző golyók, egyforma dobozok;
4. egyforma golyók, egyforma dobozok.

A lehetőségeket a következő táblázat foglalja össze:

| | $f$-re nincs külön kikötés | $f$ injektív | $f$ szürjektív |
|---|---|---|---|
| 1. | $x^n$ | $x(x-1)\cdots(x-n+1)$ | $x! \cdot S(n,x)$ |
| 2. | $\binom{x+n-1}{k}$ | $\binom{x}{n}$ | $\binom{n-1}{n-x}$ |
| 3. | $\sum_{i \le x} S(n,i) (= B(n),\ \text{ha } x \ge n)$ | $1,\ \text{ha } x \ge n;$<br>$0,\ \text{ha } x < n$ | $S(n,x)$ |
| 4. | $\sum_{i \le x} P_{n,i} (= P_n,\ \text{ha } x \ge n)$ | $1,\ \text{ha } x \ge n;$<br>$0,\ \text{ha } x < n$ | $P_{n,x}$ |

A táblázatban lévő jelölések:
$S(n,x)$: másodfajú Stirling-szám, ahány különböző módon beosztható $n$ elem $x$ nemüres csoportba;
$B(n)$: Bell-szám, ahányféleképpen $n$ elemű halmaz partícionálható;
$P_{n,i}$: az $n$ pozitív egész szám $i$ tagú összegre bontásainak száma;
$P_n$: az $n$ pozitív egész szám összegre bontásainak száma.

Az 1. esetben az $f$-re nincs feltétel $x$ elem $n$-edosztályú ismétléses variációinak, az $f$ injektív feltétel $x$ elem isméltés nélküli variációinak számát adja. Amennyiben $x \geq n$, ez utóbbi formula a közismert $\dfrac{x!}{(n-x)!}$ alakban is írható.

A 2. esetben az $f$-re nincs feltétel $x$ elem $n$-edosztályú ismétléses kombinációinak, az $f$ injektív feltétel $x$ elem ismétlés nélküli kombinációinak számát adja.

A kombinatorikában az ismétléses kombinációban szereplő binomiális együttható külön jelölést kapott: $\binom{x+n-1}{n} =: \left(\!\binom{x}{n}\!\right)$. Ezzel a jelöléssel a 2. eset szürjektív része $\left(\!\binom{x}{n-x}\!\right)$ alakban is írható.