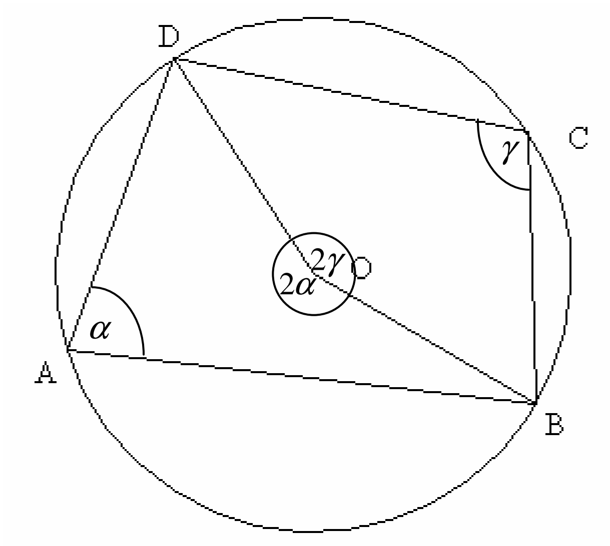
Húrnégyszögek, Ptolemaiosz tétele

Markó Zoltán 11.C

Húrnégyszögek

Definíció: Húrnégyszögnek nevezzük az olyan négyszöget, amely köré kör írható. Vagyis az olyan konvex négyszögek, amelyeknek oldalai egyben egy kör húrjai is, húrnégyszögek.
A húrnégyszögekre igaz a következő tétel, melyet a húrnégyszögek tételének neveznek: Egy húrnégyszög szemközti szögeinek összege 180°. Ez az állítás a kerületi és középponti szögek tétele alapján könnyen igazolható, hiszen az ábra jelölései szerint: α és γ DB ívhez tartozó kerületi szögek, így 2α és 2γ középponti szögek. $2\alpha + 2\gamma = 360^\circ$, így $\alpha + \gamma = 180^\circ$. Az állítás hasonlóan belátható a húrnégyszög másik két szemközti szögére is.



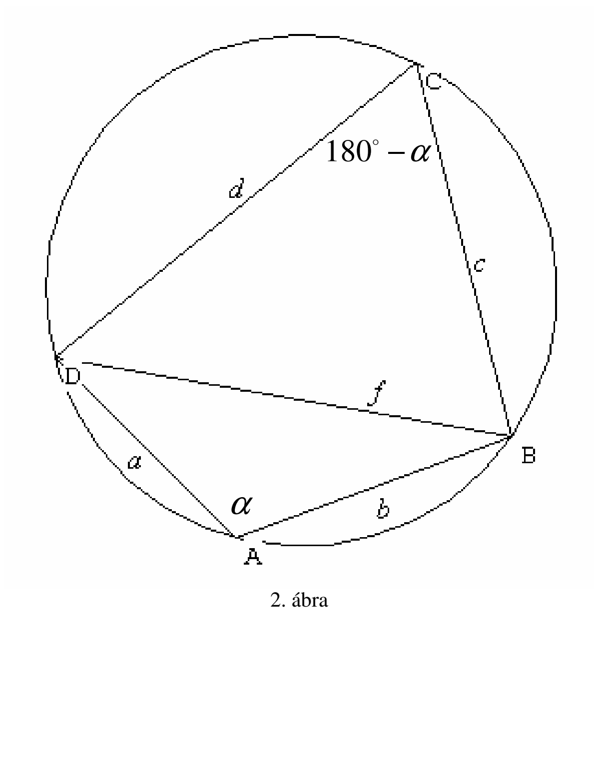
1. ábra

A húrnégyszögek tételének megfordítása szintén bizonyíthatóan igaz: Ha egy négyszög szemközti szögeinek összege 180°, akkor a négyszög köré kör írható (a bizonyítás a látókörívek segítségével végezhető).

A húrnégyszög kerülete és területe

Tetszőleges húrnégyszög kerülete:
$K = a + b + c + d$.
A húrnégyszög területét is meg tudjuk határozni az oldalak segítségével (a négyszögek közül ezt csak a húrnégyszögeknél érhetjük el).
Tekintsük a 2. ábrán látható húrnégyszöget. $DAB\measuredangle = \alpha$, a húrnégyszögek tétele miatt $BCD\measuredangle = 180^\circ - \alpha$. A húrnégyszög területének meghatározásához írjuk fel ABD és BCD háromszögekben f-re a koszinusztételt!

$$f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha, \text{ és}$$
$$f^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\left(180^\circ - \alpha\right).$$



2. ábra

Az egyenletek jobb oldalát egyenlővé téve, valamint a $\cos\left(180^\circ-\alpha\right)=-\cos\alpha$ összefüggést használva, kapjuk, hogy:

$$a^2+b^2-2ab\cos\alpha=c^2+d^2+2cd\cos\alpha$$

Az egyenletet rendezzük $\cos\alpha$-ra:

$$(1)\ \cos\alpha=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2\left(ab+cd\right)}.$$

Most fejezzük ki a húrnégyszög T területét ABD és BCD háromszögek területének összegeként, a trigonometrikus területképletet használva:

$$T=\frac{ab\sin\alpha}{2}+\frac{cd\sin\left(180^\circ-\alpha\right)}{2}=\frac{ab\sin\alpha}{2}+\frac{cd\sin\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{2}\left(ab+cd\right)$$

A kifejezés átalakítása során kihasználtuk, hogy $\sin\left(180^\circ-\alpha\right)=\sin\alpha$. A kapott összefüggésből kifejezzük $\sin\alpha$-t:

$$(2)\ \sin\alpha=\frac{2T}{ab+cd}.$$

Emeljük négyzetre az (1) és a (2) egyenleteket (mivel mindkét egyenletben mindkét oldal nemnegatív, ezt megtehetjük):

$$\sin^2\alpha=\frac{4T^2}{\left(ab+cd\right)^2}\qquad\qquad\cos^2\alpha=\frac{\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2}{4\left(ab+cd\right)^2}.$$

Mivel $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, ezért:

$$\frac{4T^2}{\left(ab+cd\right)^2}+\frac{\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2}{4\left(ab+cd\right)^2}=1$$

A törtet eltávolítva:

$$16T^2+\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2=4\left(ab+cd\right)^2$$

Az egyenletet $16T^2$-re rendezzük, majd azonos átalakításokat végzünk:

$$16T^2=4\left(ab+cd\right)^2-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2$$

$$16T^2=\left[2\left(ab+cd\right)-a^2-b^2+c^2+d^2\right]\cdot\left[2\left(ab+cd\right)+a^2+b^2-c^2-d^2\right]$$

$$16T^2=\left[2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2\right]\cdot\left[2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2\right]$$

$$16T^2=\left[c^2+2cd+d^2-\left(a^2-2ab+b^2\right)\right]\cdot\left[a^2+2ab+b^2-\left(c^2-2cd+d^2\right)\right]$$

$$16T^2=\left[\left(c+d\right)^2-\left(a-b\right)^2\right]\cdot\left[\left(a+b\right)^2-\left(c-d\right)^2\right]$$

$$16T^2=\left(c+d-a+b\right)\left(c+d+a-b\right)\left(a+b-c+d\right)\left(a+b+c-d\right)$$

Ha bevezetjük az $s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ jelölést, akkor egyenletünk a következő alakba írható:

$$16T^2=2\left(s-a\right)\cdot2\left(s-b\right)\cdot2\left(s-c\right)\cdot2\left(s-d\right)$$

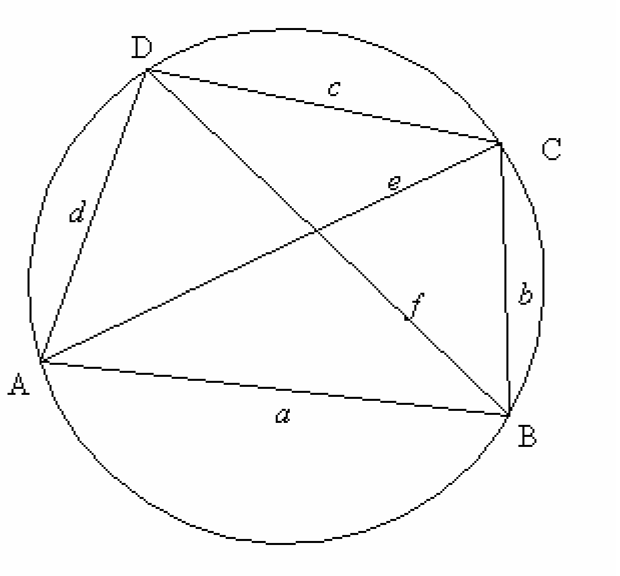
16-tal osztva és az egyenlet mindkét oldalából négyzetgyököt vonva kapjuk, hogy:

$$T=\sqrt{\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)\left(s-d\right)},$$

és ebben a képletben csak a húrnégyszög oldalai szerepelnek.

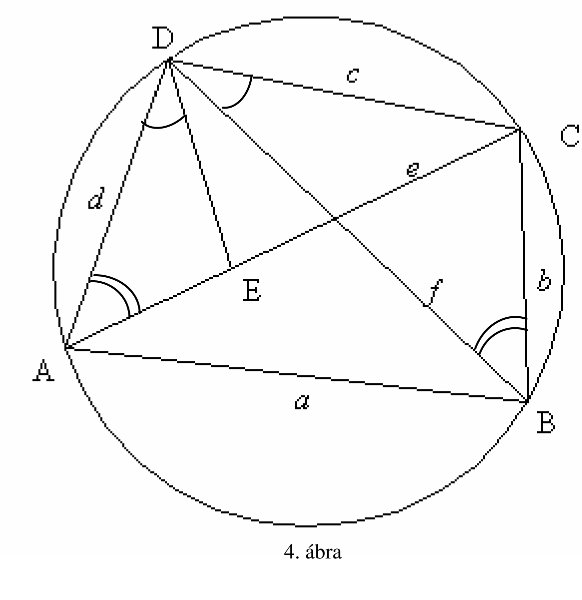
Ptolemaiosz tétele

A húrnégyszögekhez kapcsolódik még egy híres tétel, amely Klaudiosz Ptolemaiosz nevéhez fűződik. Ptolemaoisz Kr. u. 87-ben született Felső-Egyiptomban, a szülőfalujáról lett elnevezve. A hellenizmus utolsó nagy tudósa a rómaiak által megszállt Alexandriában élt és dolgozott. A Földre és a világegyetemre vonatkozó ismereteket végleg szintetizálta, a térképészet atyjának tartják. Két jelentős és terjedelmes műve maradt ránk: a Megalé Szüntaxisz Nagy Hadrend és a Geographika Hüphégészisz Földrajzi Tanítás. Az első az ókori csillagászat ismereteinek összefoglalása, melyben világképét fejti ki. A Geographika Hüphégészisz az ókor földrajzi világképe. Kr. u. 160-ban halt meg.
A matematika tehát az ő tételeként tartja számon a következő, húrnégyszögekre vonatkozó tételt: Egy húrnégyszög átlóinak szorzata megegyezik a húrnégyszög szemközti oldalainak szorzatának összegével. Vagyis a 3. ábra jelölései szerint: $ef = ac + bd$.



3. ábra

Bizonyítás:
Ptolemaiosz tételének bizonyításához vegyünk fel az AC átlón egy olyan E pontot, hogy $ADE\measuredangle = CDB\measuredangle$ teljesüljön (4. ábra).



4. ábra

Ugyanakkor a c oldal a kör pontjaiból ugyanakkora szög alatt látszik, azaz: $DAC\measuredangle = DBC\measuredangle$.

$DAE\Delta$ tehát hasonló $DBC\Delta$-höz, mivel két belső szögük (és így minden belső szögük) megegyezik. Ekkor viszont a megfelelő oldalak aránya megegyezik:

$$\frac{DA}{AE} = \frac{DB}{BC}.$$

Vagyis:

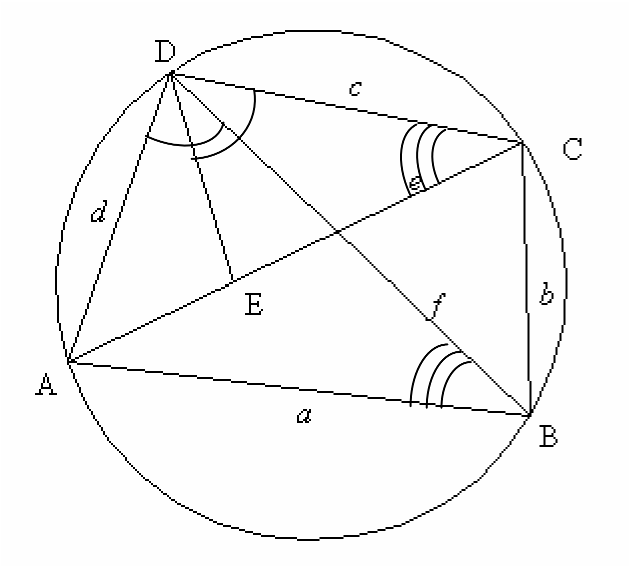
$$(1)\quad DA \cdot BC = AE \cdot DB$$

Az előbbihez hasonló módon találhatunk még hasonló háromszögeket rajzunkon (5. ábra). Ugyanis $ADB\measuredangle = EDB\measuredangle$, és a d oldal a körív pontjaiból szintén azonos szögek alatt látszik: $ABD\measuredangle = ACD\measuredangle$. Így $ABD\Delta$ hasonló $DEC\Delta$-höz. A megfelelő oldalak aránya megegyezik:

$$\frac{EC}{CD} = \frac{AB}{BD}$$

$$\Downarrow$$

$$(2)\quad AB \cdot CD = EC \cdot BD$$



5. ábra

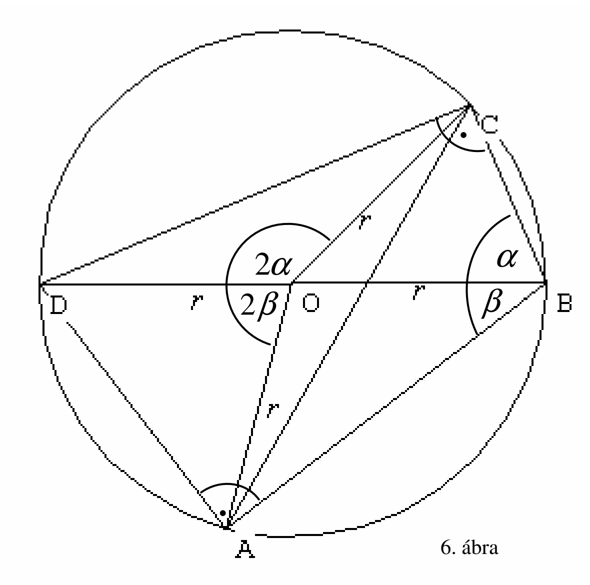
Adjuk össze (1) és (2) egyenleteket!

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = AE \cdot BD + EC \cdot BD$$
$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = BD \cdot \left(AE + EC\right)$$
$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = BD \cdot AC$$

Vagyis a kapott egyenlet: $bd + ac = ef$, és ezt kellett bizonyítanunk.

Bizonyíthatóan igaz a tétel megfordítása is: Ha egy négyszög átlóinak szorzata megegyezik a szemközti oldalak szorzatának összegével, akkor a négyszög húrnégyszög (kör írható köré).

Alkalmazás:
Ptolemaiosz tétele egyes bizonyításokat is egyszerűbbé tesz. Segítségével például addíciós tételt is be tudunk bizonyítani, az alábbi módon:



6. ábra

Vegyünk fel egy r sugarú, O középpontú körben $ABCD$ húrnégyszöget, melyre teljesüljön, hogy $DAB\measuredangle = BCD\measuredangle = 90^\circ$ (két szemközti szöge derékszög). Így ABD és BCD háromszögek olyan derékszögű háromszögek, melyeknek DB oldala közös. Thalész tételéből következik, hogy ez a DB oldal a kör átmérője, vagyis $DB = 2r$.
Legyen $CBD\measuredangle = \alpha$, ekkor a kerületi és középponti szögek tétele alapján $COD\measuredangle = 2\alpha$. Hasonlóan, ha $DBA\measuredangle = \beta$, akkor $DOA\measuredangle = 2\beta$.

Az 6. ábrán láthatóan, felírva hegyesszögek szögfüggvényeit derékszögű háromszögben:

$$BC = 2r\cos\alpha; \qquad CD = 2r\sin\alpha; \qquad AB = 2r\cos\beta; \qquad AD = 2r\sin\beta.$$

AC oldal szintén kifejezhető a sugár és a szögek szögfüggvényei segítségével. ABC háromszögben ugyanis az általános szinusztételt felírva: $AC = 2r\sin(\alpha+\beta)$.

Most írjuk fel Ptolemaiosz tételét!

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$$

Helyettesítsük be az oldalak hosszára kapott kifejezéseket:

$$2r\cos\beta \cdot 2r\sin\alpha + 2r\cos\alpha \cdot 2r\sin\beta = 2r\sin(\alpha+\beta)\cdot 2r$$

$2r$-rel osztva, és a tagokat átrendezve:

$$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$$

Ez pedig nem más, mint a két szög összegének szinuszát megadó addíciós tétel.

Ptolemaiosz tétele más feladatokban is sikeresen alkalmazható, és egyes esetekben a feladatmegoldást is egyszerűbbé teszi.

Források:

Matematikai versenytételek, I. rész, Tankönyvkiadó
www.kislexikon.hu
www.trefort.elte.hu