Gram-Schmidt-ortogonalizáció

2009. május 4.

1. Tétel. *E_n valós euklideszi tér tetszőleges $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ lineárisan független vektorrendszeréhez megadható olyan $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r$ vektorrendszer, amely ortogonális.*

Bizonyítás: Legyen $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r\}$ lineárisan független rendszer, tegyük fel, hogy $r \geq 2$ és $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$. Mutatunk egy eljárást az ortogonális vektorrendszer előállítására, ez az ún. *Gram-Schmidt-féle ortogonalizáció.*

Legyen $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$.

Ezután legyen $\mathbf{b}_2 = \alpha_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2$, de úgy, hogy $\mathbf{b}_1$ és $\mathbf{b}_2$ ortogonális legyen, azaz $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = 0$ legyen:

$$0 = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = (\mathbf{b}_1, \alpha_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2) = \alpha_1 \underbrace{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)}_{>0} + (\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2),$$

azaz $\alpha_1 = -\frac{(\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2)}{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)}$. Ekkor

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{(\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2)}{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)}\mathbf{b}_1.$$

Az eljárást hasonlóan folytatva tegyük fel, hogy $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_l$-t $(l < r)$ már megkaptuk. Ekkor

$$\mathbf{b}_{l+1} := \alpha_1\mathbf{b}_1 + \alpha_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \alpha_l\mathbf{b}_l + \mathbf{a}_{l+1}.$$

$\alpha_i = ?$, hogy $(\mathbf{b}_{l+1}, \mathbf{b}_i) = 0$, $i = 1, \ldots, l$. Felírva ismét a skaláris szorzatot:

$$0 = (\mathbf{b}_{l+1}, \mathbf{b}_i) = (\alpha_1\mathbf{b}_1 + \ldots + \alpha_l\mathbf{b}_l + \mathbf{a}_{l+1}, \mathbf{b}_i) = \alpha_i \underbrace{(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i)}_{>0} + (\mathbf{a}_{l+1}, \mathbf{b}_i),$$

a többi tag értéke a vektorok ortogonalitása miatt 0. Így $\alpha_i = -\frac{(\mathbf{a}_{l+1}, \mathbf{b}_i)}{(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i)}$. Folytatva az eljárást, a

$$\mathbf{b}_{k+1} = \mathbf{a}_{k+1} - \frac{(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{b}_1)}{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)}\mathbf{b}_1 - \frac{(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{b}_2)}{(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2)}\mathbf{b}_2 - \ldots - \frac{(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{b}_k)}{(\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_k)}\mathbf{b}_k,$$

$k = 1, 2, \ldots, r-1$ vektorrendszer ortogonális, és $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$ kiegészítéssel ortogonális vektorrendszert kapunk. $\square$

Az előző tétel következménye a következő tétel.

2. Tétel. *Minden valós euklideszi térnek van ortogonális bázisa. Minden nem nullvektor benne van egy ortogonális bázisban.*

3. Definíció (ortonormált rendszer). *Egy* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ *vektorrendszert ortonormált rendszernek nevezünk, ha ortogonális egységvektorokból áll, azaz*

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j; \\ 0, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$$

4. Tétel. *Valós euklideszi térnek van ortonormált bázisa.*

Bizonyítás: E_n-nek van $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ ortogonális bázisa (2. tétel), ahol $\mathbf{b}_i \neq \mathbf{0}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ekkor $\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{b}_i}{\|\mathbf{b}_i\|}$ választással $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ ortonormált bázis. $\square$