Az e transzcendens szám

Markó Zoltán

2009. június 16.

1. Definíció (transzcendens szám). *Egy a számot transzcendensnek nevezünk, ha nincs olyan egész együtthatós polinom, melynek a gyöke.*

Az e a matematika egyik legnevezetesebb állandója, irracionális, és emellett transzcendens. Ennek bizonyításához először a faktoriálisfogalmat általánosítjuk a következő definíció segítségével:

2. Definíció (Γ-függvény). *A* $\Gamma(a) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{a-1}\,\mathrm{d}t$ *függvényt* Γ*-függvénynek nevez-zük.*

Ha $a > 0$, akkor parciálisan integrálva:

$$a\Gamma(a) = \int\limits_0^\infty \underbrace{at^{a-1}}_{u'} \underbrace{e^{-t}}_{v}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[t^a e^{-t}\right]_0^\infty}_{0} + \int\limits_0^\infty t^a e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma(a+1).$$

Így ha $a \in \mathbb{N}$, akkor

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1),$$

és mivel $\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[e^{-t}\right]_0^\infty = 1$, ezért $\Gamma(n) = (n-1)!$ adódik.

Nézzük ezek után hogyan is igazolható e transzcendens léte.

3. Állítás. *Az e transzcendens szám.*

Bizonyítás: Legyen egy P_n n-edfokú polinom: $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Megmutatjuk, hogy minden P_n-hez létezik olyan $S \neq 0$ szám, melyre $P_n(e) \cdot S \neq 0$, ebből következik, hogy $P_n(e) \neq 0$, azaz e transzcendens.

Legyen $S = \dfrac{1}{(p-1)!} \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{p-1} (1-t)^p (2-t)^p \cdots (n-t)^p\,\mathrm{d}t.$

Megmutatjuk, hogy $p \in \mathbb{N}$-t lehet úgy választani, hogy S számunkra megfelelő legyen.

$$P_n(e)\cdot S = \sum_{k=0}^{n} a_k e^k \frac{1}{(p-1)!} \int\limits_0^\infty e^t t^{p-1} \prod_{l=1}^{n} (l-t)^p \, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(p-1)!} \int\limits_0^\infty e^{k-t} t^{p-1} \prod_{l=1}^{n} (l-t)^p \, \mathrm{d}t =$$

$$\frac{a_0}{(p-1)!} \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{p-1} \prod_{l=1}^{n} (l-t)^p \, \mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(p-1)!} \int\limits_0^\infty e^{k-t} t^{p-1} \prod_{l=1}^{n} (l-t)^p \, \mathrm{d}t =$$

$$\frac{a_0}{(p-1)!} \underbrace{\int\limits_0^\infty e^{-t} t^{p-1} \left(n! + \sum_{i=1}^{n} c_i t^i \right)^p \mathrm{d}t}_{**} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(p-1)!} \int\limits_0^\infty e^{k-t} t^{p-1} \prod_{l=1}^{n} (l-t)^p \, \mathrm{d}t = *$$

Mivel $\left(n! + \sum\limits_{i=1}^{n} c_i t^i \right)^p = n!^p + \sum\limits_{i=1}^{np} d_i t^i$ alakban írható, ezért

$$** = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{p-1} n!^p \, \mathrm{d}t + \int\limits_a^\infty e^{-t} t^{p-1} \sum_{i=1}^{np} d_i t^i \, \mathrm{d}t.$$

Mivel p egész, ezért a Γ-függvényre vonatkozó meggondolások miatt $\int\limits_0^\infty e^{-t} t^{p-1} n!^p \, \mathrm{d}t = (p-1)! n!^p$.

Hasonlóan a második tagra: $\int\limits_0^\infty e^{-t} t^{p-1} \sum\limits_{i=1}^{np} d_i t^i = \sum\limits_{i=1}^{np} d_i \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{p+i-1} = K(p+i-1)!$, $K \in \mathbb{Z}$.

Akkor $** = (p-1)! n!^p + K(p+i-1)!$, így

$$* = a_0 \cdot n!^p + Ap + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(p-1)!} \int\limits_0^\infty e^{k-t} t^{p-1} \prod_{l=1}^{n} (l-t)^p \, \mathrm{d}t = ***,$$

ahol $A \in \mathbb{Z}$.

Legyen $t = k + y$, akkor $\mathrm{d}t = \mathrm{d}y$ és az integrációs határok: $0 \to -k$, $\infty \to \infty$. Ezzel a helyettesítéssel:

$$*** = a_0 \cdot n!^p + Ap + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(p-1)!} \int\limits_{-k}^\infty e^{-y} (k+y)^{p-1} \prod_{l=1}^{n} (l-k-y)^p \, \mathrm{d}y =$$

$$a_0 \cdot n!^p + Ap + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(p-1)!} \cdot \left[\int\limits_{-k}^0 e^{-y} (k+y)^{p-1} \prod_{l=1}^{n} (l-k-y)^p \, \mathrm{d}y + \int\limits_0^\infty e^{-y} (k+y)^{p-1} \prod_{l=1}^{n} (l-k-y)^p \, \mathrm{d}y \right] =$$

$$a_0 \cdot n!^p + Ap + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(p-1)!} I_{k,1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(p-1)!} I_{k,2}.$$

Legyen $p > \max\{a_0, n\}$ prímszám. Akkor

$$I_{k,2} = \int_0^\infty e^{-y}(k+y)^{p-1}\prod_{l=1}^n (l-k-y)^p \,\mathrm{d}y = \int_0^\infty e^{-y}\,\underbrace{(k+y)^{p-1}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^n (l-k-y)^p(-1)^p}_{Q(y)}\,y^p \,\mathrm{d}y,$$

ahol $Q(y)$ egész együtthatós polinom, így $Q(y) = \sum\limits_{i=0}^r b_i y^i$ alakban írható. Akkor

$$I_{k,2} = \int_0^\infty e^{-y}\sum_{i=1}^r b_i y^i y^p \,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^r b_i \int_0^\infty e^{-y} y^{p+i}\,\mathrm{d}y = \sum_{i=0}^r b_i (p+i)! = B_k \cdot p!.$$

Így tehát $\sum\limits_{k=1}^n \dfrac{a_k}{(p-1)!}\cdot I_{k,2} = \sum\limits_{k=1}^n a_k B_k p = pB$, ahol $B \in \mathbb{Z}$.

Becsüljük most $\sum\limits_{k=1}^n \dfrac{a_k}{(p-1)!} I_{k,1}$-et:

$$\left|\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(p-1)!} I_{k,1}\right| \le \sum_{k=1}^n \frac{|a_k|}{(p-1)!}\left|\int_{-k}^0 e^{-y}(k+y)^{p-1}\prod_{l=1}^n (l-k-y)^p \,\mathrm{d}y\right| \le$$

$$\sum_{k=1}^n |a_k|\cdot e^n \cdot n^{p-1} n^{np} n \cdot \frac{1}{(p-1)!} \le \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n |a_k|\cdot e^n\right)}_{C(P(n))}\cdot\frac{(n^{n+1})^p}{(p-1)!} \to 0,$$

ha $p \to \infty$, ugyanis $C(P(n))$ P_n-től függő konstans.

Ekkor tehát

$$P_n(e)\cdot S = a_0 \cdot n!^p + Ap + Bp + M(p) = a_0 \cdot n!^p + \underbrace{(A+B)p}_{\in\mathbb{Z}} + M(p),$$

ahol ha $p > a_0, n, p_0$, akkor $|M(p)| < \dfrac{1}{2}$.

A fordított háromszög-egyenlőtlenség szerint ekkor

$$|P_n(e)\cdot S| = |a_0\cdot n!^p + (A+B)p + M(p)| \ge |a_0 \cdot n!^p + (A+B)p| - |M(p)| > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

vagyis $P_n(e)\cdot S \neq 0$, amiből a bizonyítás elején tett meggondolások miatt következik, hogy $P_n(e) \neq 0$. Mivel P_n tetszőleges polinom volt, ezért e transzcendens. $\square$