Matematika ÉP2
Elsőrendű differenciálegyenletek, 3. feladatsor
2016/17. tavaszi félév

1. Elméleti összefoglaló

Mik is azok a differenciálegyenletek?

A mindennapi életben lejátszódó mozgásokat, folyamatokat és jelenségeket függvényekkel lehet leírni. Olyan egyenleteket írhatunk fel, amelyekben a folyamatot leíró függvény és annak valahanyad rendű deriváltjai szerepelnek. Az ilyen függvényegyenleteket differenciálegyenleteknek nevezzük és célunk a megoldásfüggvény megtalálása. Az egyenletben szereplő legmagasabb derivált rendjét a differenciálegyenlet *rend*jének hívjuk. A differenciálegyenlet *általános megoldás*a nem más, mint az összes megoldást tartalmazó halmaz. Általában ezt az általános megoldást keressük. Ugyanakkor vannak feladatok, melyekben egy további, úgynevezett kezdeti feltételt kielégítő, *partikuláris megoldás*t keresünk. Egy differenciálegyenletet a hozzá tartozó kezdeti feltételekkel együtt *Cauchy-feladatnak vagy kezdetiérték-problémának* nevezünk.

A differenciálegyenletekkel kapcsolatosan felmerülő kérdéseink egyike, hogy milyen feltételekkel létezik egyáltalán megoldás, és ha ezt már tisztáztuk, akkor mikor mondhatjuk, hogy ez a megoldás egyértelmű. Mivel a differenciálegyenletek csak közelítik a valóságot, de sosem írják le pontosan, így nem hivatkozhatunk arra, hogy a megoldás azért létezik és egyértelmű, mert konkrét jelentéssel bír a gyakorlatban. Ugyanakkor pontos matematikai tételek léteznek azzal kapcsolatban, hogy mely feltételek teljesülése esetén lesz a Cauchy feladatnak egyértelmű megoldása. A továbbiakban feltesszük, hogy a függvényeink kellően "szépek", és a megoldás létezését nem vitatjuk.

Elsőrendű szétválasztható változójú (szeparálható) differenciálegyenletek

Egy differenciálegyenletet elsőrendű szétválasztható változójú egyenletnek hívunk, ha felírható a következő alakban:

$$y' = f(x)g(y)$$

A megoldás menete: Először megkeressük azokat az azonosan konstans y függvényeket, melyekre $g(y) = 0$. Ezek megoldások. A következő lépésben felírjuk, hogy

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y),$$

majd pedig szeparáljuk az x-et és y-t tartalmazó függvényeket az egyenlet két különböző oldalára. Ezt követően integrálunk, azaz felírjuk, hogy

$$\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x.$$

Ha mindkét oldal integrálható, akkor x és y között kapunk egy összefüggést, amelyből jó esetben kifejezhető y. (Amennyiben Cauchy-feladatot kell megoldani, úgy az adott feltételt kielégítő partikuláris megoldás meghatározására ezen lépés után van lehetőség.)

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Egy differenciálegyenletet elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletnek hívunk, ha felírható a következő alakban:

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Ha a fenti egyenlet jobb oldalán $q(x) \equiv 0$, akkor homogén elsőrendű lineáris differenciálegyenletünk van. Ez pontosan a következő alakot jelenti: $y' + p(x)y = 0$.

Megoldás menete: Az inhomogén egyenlet megoldása két részből áll. Előbb megkeressük homogén egyenlet általános megoldását, majd ezt követi az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának megkeresése az állandók variálásának módszerével. Végül ezeket összeadva adódik az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{\text{IH, Á}} = y_{\text{H, Á}} + y_{\text{IH, P}}.$$

(Amennyiben itt is Cauchy-feladatot kell megoldani, úgy az adott feltételt kielégítő partikuláris megoldás meghatározására ezen lépés után van lehetőség.)

2. Feladatok

1. Határozza meg a következő szétválasztható változójú differenciálegyenletek általános megoldását!

   (a) $y^2 - 1 = (2y + xy)y'$ (b) $2(xy + x - y - 1) = (x^2 - 2x)y'$

   (c) $\sqrt{1 - y^2} = y'\sqrt{1 + x^2}$ (d) $\left(x + xy^2\right) y' = 3$

   (e) $\sqrt{1 - y^2} = y'(1 - x^2)$ (f) $(4 - x^2)e^{2y} \cdot y \cdot y' = x - 1$

   (g) $\left(x + xy^2\right) y' = 3$ (h) $\left(x^2 - 1\right) \left(y^2 + 1\right)^{-2} \cdot y \cdot y' = 1$

   (i) $yy' = x^2y + 4y - x^2 - 4$ (j) $\sqrt{25 - x^2} \cos^2 y \cdot y' = 1$

2. Határozza meg a következő Cauchy feladatok megoldását (szétválasztható változójú egyenletek)!

   (a) $y \cdot y' = \frac{e^x}{1+e^x}, \quad y(1) = 1$ (b) $(x + 1)y' = y - 2, \quad y(-3) = 1$

   (c) $\left(x^2 - 1\right) y' = xy, \quad y(\sqrt{2}) = -1$ (d) $y \ln y \mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0, \quad y(1) = 1$

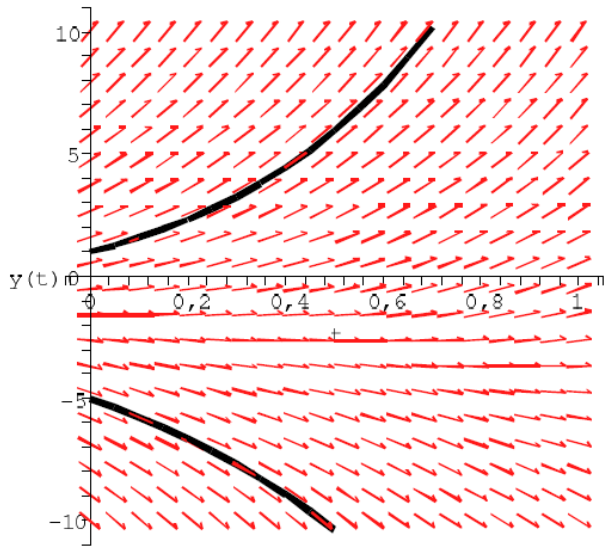
3. Szórjunk m tömegű anyagot oldószerbe. az oldódás sebessége a még fel nem oldódott anyag mennyiségével arányos, azaz az oldódást leíró differenciálegyenlet $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(m - x)$, ahol x jelöli a t idő alatt feloldódott anyag mennyiségét, k arányossági tényező. Ha 1 perc alatt az anyag 20%-a oldódik fel, akkor 3 perc alatt hány százaléka? (Azaz $x(0) = 0$, $x(1) = 0,2m$, $x(3) = ?$.)

4. Az $y' = 3(x - 1)^2 y$ differenciálegyenletet kielégítő y függvénynek mennyi lesz az értéke a 2 helyen, ha $y(1) = 1$?

5. Az $y' = (x-1)^2 \cos^2 y$ differenciálegyenletet kielégítő y függvénynek mennyi lesz az értéke a 2 helyen, ha $y(1) = 0$?

6. Az $y' = \left(y^2+1\right) e^{-2x}$ differenciálegyenletet kielégítő y függvénynek mennyi lesz az értéke a 1 helyen, ha $y(0) = 0$?

7. Határozza meg az $y' - 2y = 3e^t$ elsőrendű lineáris differenciálegyenletek általános megoldását!



1. ábra. Iránymező az $y' - 2y = 3e^t egyenletre$.

8. Határozza meg a következő elsőrendű lineáris differenciálegyenletek általános megoldását!

(a) $y' + xy - x = 0$ (b) $xy' - \frac{y}{x+1} = x$

(c)$y' = xy + x^3$ (d) $y' + ythx = 6e^{2x}$

(e)$\left(x^2+4\right) y' - 2xy = \left(x^2+4\right)^2 \cos x$ (f) $\cos x \cdot y' = \sin x \cdot y + \cos^2 x$

9. Határozza meg a következő Cauchy feladatok megoldását (elsőrendű lineáris egyenletek)!

(a) $y' \cos x + y \sin x = 1, \quad y(0) = 1$ (b) $xy' - 2y = x^3 e^x, \quad y(1) = 2$

(c) $xy' + 2y = x^4, \quad y(1) = -2$ (d) $y' + x^2 y = x^2, \quad y(2) = 1$

(e) $y' + y \cos x = \frac{\sin 2x}{2}, \quad y(0) = 3$