Matematika A3, 10. gyakorlat

Markó Zoltán

2011. november 15.

marzol89@gmail.com

1. Számítsuk ki az $\int\limits_\gamma |z|\overline{z}\,\mathrm{d}z$ integrált, ahol γ a 0 középpontú, 1 sugarú felső félkör, pozitív irányítással.

2. Számítsuk ki az $\int\limits_\gamma e^z\,\mathrm{d}z$ integrált, ahol γ a 0 középpontú, 2 sugarú alsó félkör, pozitív irányítással.

3. Határozzuk meg az $f(z) = 3z^2 + 2z$ függvény integrálját az $1-i$, $2-i$, $2+i$ csúcsok által meghatározott töröttvonalon.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat a Cauchy-integrálformulák segítségével:

   a) $\oint\limits_\gamma \dfrac{2z-1}{z^2-z}\,\mathrm{d}z$, γ az 1 középpontú, $\frac{1}{2}$ sugarú kör, pozitív irányítással;

   b) $\oint\limits_\gamma \dfrac{\operatorname{ch} z}{z^5}$, γ a $|z| = 4$ körvonal, pozitív irányítással.

5. Számítsuk ki az $\oint\limits_\gamma \dfrac{1}{z(z^2-1)}\,\mathrm{d}z$ integrál értékét, ahol γ a $|z+1| = \frac{3}{4}$ kör, pozitív irányítással.

6. Határozzuk meg a következő függvények adott bázispontú Taylor-sorát és konvergenciatartományát!

   a) $f(z) = \ln(1+z)$, $z_0 = 0$;

   b) $g(z) = \sin z$, $z_0 = \frac{\pi}{4}$;

   c) $h(z) = ze^{z^2}$, $z_0 = 0$.

7. Határozzuk meg a következő függvények izolált szingularitásait, és azok típusait Laurent-sorfejtéssel. Hol konvergál a sor?

   a) $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$;

   b) $g(z) = e^{\frac{1}{z}}$;

   c) $h(z) = \dfrac{\sin z}{z^5}$.

8. Határozzuk meg a következő függvények Laurent-sorát és a sor konvergenciatartományát az adott tartományokon:

   a) $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$, $z_0 = 1$ körül;

   b) $g(z) = \dfrac{z}{(z-1)(2-z)}$, $z_0 = 0$ körül, a $|z| < 1$, $1 < |z| < 2$, illetve $2 < |z|$ tartományokon.