Matematika A2a, pótgyakorlat

Markó Zoltán

2012. május 15.

marzol89@gmail.com

1. Határozzuk meg az

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \le x \le \pi \\ -1, & \text{ha } \pi < x < 2\pi \end{cases} \qquad f(x+2\pi) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$$

és a $g(x) = |\sin x|$ függvények Fourier-sorát.

2. Határozzuk meg az $f(x) = x^2$, $-\pi < x \le \pi$, $f(x+2\pi) = f(x)$ függvény Fourier-sorát, és ennek segítéségével bizonyítsuk be, hogy $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

3. Határozzuk meg az

$$\iint\limits_T x \sin xy \,\mathrm{d}T$$

integrál értékét, ahol T az $1 \le x \le 3$, $0 \le \frac{\pi}{2}$ téglalaptartomány.

4. Határozzuk meg az

$$\iint\limits_T x \,\mathrm{d}T$$

integrál értékét, ahol T az $y = x^2$ és az $y = x + 2$ görbék által határolt korlátos tartomány.

5. Alakítsuk kétféleképpen kétszeres integrállá a következő kettősintegrált, majd az egyik módon számítsuk ki:

$$\iint\limits_T (18xy^2 - 9y) \,\mathrm{d}T,$$

ahol T az $O(0,0), A(2,0), B(2,3), C(1,3)$ pontok által meghatározott trapéz.

6. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét!

$$I = \int\limits_{-1}^{0} \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{0}^{1-x} f(x,y) \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

7. Határozzuk meg az

$$\iint\limits_T x^2 y \,\mathrm{d}T$$

integrál értékét, ahol T az $1 \le x^2 + y^2 \le 4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ pontok halmaza.

8. Határozzuk meg annak a síkrésznek a területét, amelyet a következő egyenlőtlenségek írnak le:

$$x^2 + y^2 \ge 4x, \quad x^2 + y^2 \le 8x, \quad y \le \sqrt{3}x, \quad y \ge x.$$

9. Számoljuk ki a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ és a $z = 6 - x^2 - y^2$ egyenletű felületek által határolt térrész térfogatát.

10. Számoljuk ki az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ és a $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}$ egyenlőtlenségekkel jellemzett térrész térfogatát.

11. Határozzuk meg az

$$I = \iiint_V xyz \, \mathrm{d}V$$

integrál értékét, ahol a V korlátos térrész az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ gömb belsejének az $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ térnyolcadba eső része.