Matematika A2a, 8. gyakorlat

Markó Zoltán

2011. március 30.

marzol89@gmail.com

1. Mutassuk meg, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ feltételesen konvergens $0 < \alpha \leq 1$-re, abszolút konvergens $\alpha > 1$-re.

2. Konvergensek, abszolút vagy feltételesen konvergensek a következő sorok?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-0,1)^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sqrt[n]{\frac{1}{10}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} \right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n - \ln n}.$$

3. Mutassuk meg, hogy $\sum a_n$ és $\sum b_n$ konvergenciájából nem következik $\sum a_n b_n$ konvergenciája. Mi a helyzet, ha csak pozitív tagú sorokat tekintünk?

4. Becsüljük meg S_4 hibáját a következő sorok esetén:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^2 n}.$$

5. Melyik részletösszeg közelít $< 10^{-2}$ hibával? (Nem kell a legkisebb ilyen n-et megkeresni).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\sqrt{n}}.$$

6. Határozzuk meg a következő függvénysorozatok konvergenciatartományát és határfüggvényét!

$$(\ln x)^n, \quad n \sin \frac{x}{n}, \quad \frac{x^n}{1+x^{2n}}, \quad n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right), \ x > 0,$$

$$\sqrt{n(1-x^2)}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}), \quad \frac{2nx^4}{n^2x^4+n+3}.$$

7. Adjuk meg a következő függvénysorok konvergenciatartományát, és ha lehet, összegfüggvényét!

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{2n}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln x}{(x+n)(x+n+1)}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4+x^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)(1-\sqrt{x}) \cdots (1-\sqrt[n]{x}), \ x > 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^2}.$$

8. Hol egyenletesen konvergensek a következő függvénysorozatok?

$$e^{-nx}, \quad xe^{-nx}, \quad x^n - x^{n+1}, \quad \frac{nx}{1+x+n}.$$

9. Hol egyenletesen konvergensek a következő sorok?

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^3 e^{-nx}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-nx}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^x}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{e^{nx}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n} + n\pi\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{nx}.$$

10. a) Igazoljuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^x n\left(\ln\left(t + \frac{1}{n}\right) - \ln t\right) \mathrm{d}t = \ln x,$$

ha $x > 0$.

b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{arctg} n^5 x^2}{\sqrt{n} + x} \,\mathrm{d}x = ?$

c) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(2^n x)}{x^4 + 4^n} = ?$

d) Határozzuk meg $S'(1)$-et, ha $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1-x}{n}}{n+1}$.