Matematika A2a, 7. gyakorlat

Markó Zoltán

2011. március 23.

marzol89@gmail.com

1. Írjuk fel a $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ mátrixhoz tartozó kvadratikus alakot, illetve az $x^2+xy+y^2+2xz+3yz+5z^2$ kvadratikus alakhoz tartozó mátrixot. Milyen alakzat egyenlete

   a) $x^2 - xy + y^2 = 1$;

   b) $x^2 - y^2 + 4xy = 4$?

   Használjuk a főtengelytételt.

2. Határozzuk meg a következő sorok n-edik részletösszegét: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} - \frac{1}{3^{n+2}}\right) = ?$, $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{5^n}\right) = ?$

4. Határozzuk meg a következő sorösszegeket:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg}(n+1)), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

5. Konvergensek-e a következő numerikus sorok?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n.$$

6. A majoráns, illetve minoráns kritériummal döntsük el, hogy az alábbi sorok konvergensek-e.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n \cdot 2^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+\ldots+n},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3 - 8n^2 + 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th} n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right).$$

7. Vizsgáljuk meg a következő sorok konvergenciáját a gyökkritérium segítségével.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}.$$

8. Vizsgáljuk meg a következő sorok konvergenciáját a hányadoskritérium segítségével.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{5^{3n} n!(n+1)!(n+2)!}.$$

9. Milyen $c > 0$-ra konvergens a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{n}\right)^n n!$ sor?

10. Az integrálkritérium segítségével vizsgáljuk meg a következő sorokat konvergencia szempontjából!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n},\ p \in \mathbb{N}^+, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} n}{1 + \operatorname{ch}^2 n}.$$

11. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n^\alpha}}$ konvergens, ha $\alpha > 0$.

12. Abszolút konvergensek-, illetve konvergensek-e a következő sorok?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^{n+1}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}}.$$