Matematika A2a, 6. gyakorlat

Markó Zoltán

2012. március 14.

marzol89@gmail.com

1. **BII.21. 1*, 2*.** Lineárisak-e a következő leképezések $\mathbb{R}^2$-en, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortéren?

   a) $A : \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2x - y \\ -2x \end{bmatrix}$;

   b) $B : \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x^2 + y^2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2. Lineáris operátor-e?

   a) $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $T : V \to \mathbb{R}$,
   $$Tf(x) = 1 + f(x),$$
   illetve
   $$Tf(x) = f(1 + x);$$

   b) $V = \{\text{legfeljebb másodfokú polinomok}\}$, $T : V \to V$,
   $$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(2x + 1) + a_2(2x + 1)^2,$$
   illetve
   $$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + 1 + (a_1 + 1)x + (a_2 + 1)x^2.$$

3. **BII.21. 18*, 19*.** Igazoljuk, hogy az alábbiakban megadott H_1 és H_2 halmazok vektorteret alkotnak $\mathbb{R}$ felett a szokásos műveletekkel, és hogy a $H_1 \to H_2$ lineáris leképezések lineárisak!

   a) $H_1 := \{\mathbb{R}\text{-en differenciálható függvények halmaza}\}$, $H_2 := \{\mathbb{R}\text{-en értelmezett függvények halmaza}\}$; $D : H_1 \to H_2$, $D : f \mapsto f'$, a deriválás-operátor;

   b) $H_1 := \{[a, b]\text{-n integrálható függvények halmaza}\}$, $H_2 := \mathbb{R}$; $I : H_1 \to H_2$, $I : f \mapsto \int_a^b f$, az integrálás.

4. **BII.21. 24.** Mutassuk meg, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + b$ függvény pontosan akkor lineáris leképezés, ha $b = 0$.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha $A : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés, akkor $A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, és $A(-\mathbf{v}) = -A(\mathbf{v})$.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha V véges dimenziós vektortér, $A : V \to V$ lineáris operátor, akkor
   $$A \text{ invertálható} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{Im} A = V.$$

7. **BII.21. 28*, 32*.** Mutassuk meg, hogy a következő leképezések lineáris operátorokat definiálnak.

   a) $A : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x + y \\ y + z \\ x + z \end{bmatrix}$;

   b) $B : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x - 2y \\ -x + 2y \\ 2x - 4y \end{bmatrix}$.

Írjuk mátrixukat a standard bázisban, és ez alapján határozzuk meg képterük és magterük dimenzióját. Adjunk meg egy-egy bázist a magtérben és a képtérben is.

8. Legyen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció, mely a standard bázisban felírva a következőképp hat:

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Legyen $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$, illetve $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ egy-egy bázis $\mathbb{R}^2$-ben, illetve $\mathbb{R}^3$-ben. Adjuk meg a $\mathbf{T}_{B,B'}$ mátrixot.

9. **BII.21. 43*.** Az alábbiakban megadtuk T lineáris leképezés hatását $\mathbb{R}^3$ egy bázisán. Írjuk fel T mátrixát a standard bázisban, és határozzuk meg T magterét, képterét (egy-egy bázis felírásával bennük).

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

10. **BII.21. 47*, 49*, 53*, 55*.** Határozzuk meg a következő $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformációk mátrixait a standard bázisban:

a) tükrözés az x-tengelyre;

b) tükrözés az $x = y$ egyenletű egyenesre;

c) tükrözés az origóra;

d) vetítés az y-tengelyre;

e) origó körüli forgatás α szöggel.

11. Határozzuk meg a következő $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformációk mátrixait a standard bázisban:

a) $z = 0$ síkra vetítés;

b) $x = 0$ síkra tükrözés;

c) a z-tengely körüli α szögű forgatás;

d) az origón átmenő, $\mathbf{n} = (A, B, C)$ (egységnyi) normálvektorú síkra tükrözés.

12. Legyen $\mathbb{R}^3$-ben S az xy-síkra tükrözés, T az origóra tükrözés, P a z-tengelyre vetítés, I az identitás operátora. Mutassuk meg, hogy $I + TS - 2P = 0$, ahol 0 az az operátor, mely minden vektort az origóba képez.

13. Legyen σ az $\mathbb{R}^3$-beli $x + y + z = 0$ egyenletű sík, és $\mathbb{R}^3$-ön értelmezett lineáris operátorok a következők: S a σ síkra való merőleges vetítés, T a σ-ra való tükrözés és I az identitás. Mutassuk meg, hogy $(S + T)^2 = I + 3S$.