Matematika A2a, 6. gyakorlat

Markó Zoltán

2011. március 16.

marzol89@gmail.com

1. Adjuk meg x és x^2 hajlásszögét az $\langle f, g\rangle = \int\limits_0^1 fg$ skaláris szorzat mellett.

2. Egészítsük ki $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$-t $\mathbb{R}^4$-ben ortogonális bázissá, és írjuk fel benne $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$-t.

3. Keressünk P_2-ben ortogonális bázist, ha $\langle p, q\rangle = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,\mathrm{d}x$. Mi lesz x^3 merőleges vetülete P_2-re? Melyik $p \in P_2$-re minimális $\int\limits_0^1 |x^3 - p(x)|^2\,\mathrm{d}x$ értéke?

4. Milyen c-re lesz minimális $\|\mathbf{x} - c\mathbf{y}\|$ értéke, ha $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$?

5. Legyen
$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
Írjuk fel a $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$ vektornak a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ alterébe eső és az ezen altérre merőleges komponensekre való felbontását.

6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ esetén
$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2$$
(ez az ún. *paralelogramma-szabály*).

7. Bizonyítsuk be, hogy Ker A merőlegesn $\mathbf{A}$ sorvektoraira, és minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ felbomlik egy Ker A-beli és egy az $\mathbf{A}$ sorai által kifeszített altérbe eső vektor összegeként.

8. Unitér, illetve ortogonális mátrixok-e a következők:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & -1 \end{bmatrix}, \ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

9. $\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_1$, $\mathbf{A}\mathbf{s}_2 = -\mathbf{s}_2$. Szimmetrikus, illetve ortogonális-e $\mathbf{A}$? Mi a helyzet akkor, ha $\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$?

10. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, és $T\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b}$. Mi az adjungált operátor? Nézzük meg definíció szerint és a mátrixa alapján is.

11. Írjuk fel a $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ mátrixhoz tartozó kvadratikus alakot, illetve az $x^2 + xy + y^2 + 2xz + 3yz + 5z^2$ kvadratikus alakhoz tartozó mátrixot. Milyen alakzat egyenlete

    a) $x^2 - xy + y^2 = 1$;

    b) $x^2 - y^2 + 4xy = 4$?

    Használjuk a főtengelytételt.