

Matematika A2a, 5. gyakorlat

Markó Zoltán

2012. március 7.

marzol89@gmail.com

1. Vektorteret alkotnak-e \mathbb{R} felett?

a) \mathbb{R}^2 a következő műveletekkel:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1+2y_1}{3} \\ \frac{x_2+3y_2}{2} \end{bmatrix}, \quad \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \frac{\lambda}{2} x_2 \end{bmatrix};$$

b) \mathbb{R}^2 a következő műveletekkel:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 - y_1 \\ -x_2 - y_2 \end{bmatrix}; \quad \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix}.$$

2. Altér-e az összes $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények körében?

a) $\{f \mid f(0) = 1\}$;

b) $\{f \mid f(1) = 0\}$;

c) $\{f \mid f$ kétszer differenciálható, és $f''(x) + xf(x) = 0\}$;

d) $\{f \mid f \geq 0\}$;

e) $\left\{ f \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f| \text{ konvergens} \right\}$.

3. Benne van-e $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, illetve $\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$ az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ által generált altérben?

4. Lineárisan független rendszert alkotnak-e

a) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ \mathbf{R}^3 -ben;

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ \mathbf{R}^3 -ben;

c) $\cos^2 x$, $\sin^2 x$, 1 $C(\mathbb{R})$ -ben;

d) $x^j e^{\lambda_j x}$ alakú vektorok $C(\mathbb{R})$ -ben ($j \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, ha $i \neq j$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$).

5. Bázis-e a legfeljebb harmadfokú polinomok terében:

$$p_0(x) = 6x^3 - 4x^2 + 2x - 3; \quad p_1(x) = 7x^2 - 5x + 4; \quad p_2(x) = -3x + 2; \quad p_3 = 4.$$

6. Válasszuk meg $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ \alpha \\ 3 \end{bmatrix}$$

bázis legyen \mathbb{R}^4 -ben. Adjuk meg ebben a bázisban $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ koordinátáit.

7. Legyen \mathbb{R}^3 kanonikus bázisa $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Bázis-e \mathbb{R}^3 -ben $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{e}_2 = -\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$?
8. Tegyük fel, hogy egy V vektortérben $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineárisan független vektorok. Milyen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ paraméterek esetén lesz összefüggő vektorrendszer: $\alpha\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{a} - \beta\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$, $2\mathbf{a} - \mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$?
9. Legyen $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ független, de $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}\}$, $\{\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$, $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ összefüggők. Mit mondhatunk \mathbf{d} -ről?