Matematika A2a, 5. gyakorlat

Markó Zoltán

2011. március 9.

marzol89@gmail.com

1. Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit, illetve a hozzájuk tartozó sajátvektorokat:

   a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$;

   b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Mik az alsó vagy felső háromszögmátrixok sajátértékei?

3. Bizonyítsuk be, hogy egy négyzetes mátrix invertálható $\Leftrightarrow$ $\lambda = 0$ nem sajátértéke.

4. Legyen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$
   Keressük meg $\mathbf{A}^{25}$ sajátértékeit és sajátvektorait.

5. Igazoljuk, hogy egy 2×2-es $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja
$$p(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}\mathbf{A} \cdot \lambda + \det \mathbf{A}.$$

6. Melyik igaz?

   a) Ha $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{E}$, akkor $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ sajátvektorai ugyanazok.

   b) $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A}$-nak csak $\lambda = 0$ a sajátértéke.

   c) Ha $\lambda = 0$ sajátértéke $\mathbf{A}^2$-nek, akkor $\mathbf{A}$-nak is.

   d) λ^2 sajátértéke $\mathbf{A}^2$-nek $\Leftrightarrow$ λ vagy $-\lambda$ sajátértéke $\mathbf{A}$-nak.

7. Írjuk fel a $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrixot $\mathbf{S} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{S}^{-1}$ alakban, és ennek segítségével adjuk meg a $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{80}$ mátrixot.

8. Skaláris szorzás-e?

   a) $C^1[0,1]$-en $\int\limits_0^1 fg$, $\int\limits_0^1 f'g'$, $\int\limits_0^1 f'g' + f(0)g(0)$;

   b) $\mathbb{R}^2$-en $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 6x_2y_2$;

   c) $\mathbb{R}^3$-ön $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + x_3y_3$, illetve $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + x_3^2y_3^2$.

9. Adjuk meg x és x^2 hajlásszögét az $\langle f, g \rangle = \int\limits_0^1 fg$ skaláris szorzat mellett.