Matematika A2a, 4. gyakorlat

Markó Zoltán

2012. február 29.

marzol89@gmail.com

1. **BII.19. 80, 81. 83.** Határozzuk meg definíció alapján a következő mátrixok rangját:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 13 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ ahol } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

2. **BII.19. 84, 85.** Elemi átalakításokkal határozzuk meg a következő mátrixok rangját:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

3. **BII.19. 90, 96.** Határozzuk meg a következő mátrixok rangját a paraméterek függvényében.
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & a \\ b & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}.$$

4. **BII.20. 36, 37.** Az egyenletrendszer mátrixának rangja segítségével határozzuk meg, hogy van-e a rendszernek nemtriviális megoldása.

   a)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

   b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - 6x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 &= 0 \\ 2x_3 - 7x_4 + 6x_5 &= 0 \end{aligned}$$

5. **BII.20. 52.** Határozzuk meg az a valós paraméter értékét úgy, hogy az alábbi egyenletrendszernek csak triviális megoldása legyen.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \\ ax_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

6. **BII.20. 54.** Határozzuk meg a c valós paraméter értékét úgy, hogy az alábbi egyenletrendszernek legyen nemtriviális megoldása.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + cx_2 + 5x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - cx_3 &= 0 \end{aligned}$$

7. **BII.20. 39.** Állítsuk elő az $x^2 - 3x + 5$ polinomot az $x^2 + 1$, $x^2 + x + 1$, $x - 2$ polinomok lineáris kombinációjaként.

8. **BII.20. 40.** Mutassuk meg, hogy n számú, legfeljebb $n - 2$-edfokú polinom lineárisan összefüggő.

9. Lineárisan független vektorrendszer-e

   a) $\mathbb{R}^4$-ben $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$;

   b) a legfeljebb harmadfokú polinomok vektorterében $x^3 + 2$, $3x^2 + 4x$, $5x^2 + 6x$;

   c) az $\{a + b\cos x + c\cos^2 x \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ vektortérben $1 + \cos x$, $\cos x + \cos^2 x$, $\cos 2x$.