Matematika A2a, 4. gyakorlat

Markó Zoltán

2011. március 2.

marzol89@gmail.com

1. Lineáris operátor-e?

   a) $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $T : V \to \mathbb{R}$,
   $$Tf(x) = 1 + f(x),$$
   illetve
   $$Tf(x) = f(1 + x);$$

   b) $V = \{\text{legfeljebb másodfokú polinomok}\}$, $T : V \to V$,
   $$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(2x + 1) + a_2(2x + 1)^2,$$
   illetve
   $$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + 1 + (a_1 + 1)x + (a_2 + 1)x^2.$$

2. Bizonyítsuk be, hogy ha V véges dimenziós vektortér, $A : V \to V$ lineáris operátor, akkor
$$A \text{ invertálható } \Leftrightarrow \operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \operatorname{Im} A = V.$$

3. Milyen V vektorterekben van olyan $A : V \to V$ lineáris operátor, hogy $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} A$?

4. Legyenek $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, és $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris operátor, aminek hatása ezen vektorokra:
$$T\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ illetve } T\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$
Határozzuk meg $T\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ vektort.

5. Legyen $T : V \to V$ lineáris leképezés, V egy bázisa $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, T hatása a bázisvektorokon:
$$T\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3,\ T\mathbf{e}_2 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3,\ T\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3.$$
Adjunk meg $\operatorname{Ker} T$-ben és $\operatorname{Im} T$-ben egy bázist.

6. Legyen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció, mely a standard bázisban felírva a következőképp hat:
$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
Legyen $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$, illetve $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ egy-egy bázis $\mathbb{R}^2$-ben, illetve $\mathbb{R}^3$-ben. Adjuk meg a $\mathbf{T}_{B,B'}$ mátrixot.

7. Jelölje P_2 a legfeljebb másodfokú polinomok vektorterét, és legyen ennek egy bázisa:

$$B = \{3x + 3x^2, -1 + 3x + 2x^2, 3 + 7x + 2x^2\}.$$

Legyen $T : P_2 \to P_2$ lineáris leképezés, melynek mátrixa B-ben:

$$\mathbf{T}_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Adjuk meg $T(1 + x^2)$-et.

8. Írjuk fel annak az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris operátornak a standard bázis-beli mátrixát, amely

a) tükröz az y-tengelyre;

b) merőlegesen vetít az xy-síkra;

c) tükröz az y-tengelyre, majd merőlegesen vetít az xy-síkra.

Mi a kapcsolat a három mátrix között?

9. Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit, illetve a hozzájuk tartozó sajátvektorokat:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$;

b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.