Matematika A2a, 3. gyakorlat

Markó Zoltán

2012. február 22.

marzol89@gmail.com

1. **BII.20. 16.** Oldjuk meg Gauss-módszerrel a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 2 \\ -2x_1 - 2x_2 - 6x_3 - 8x_4 &= 10 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 + 3x_5 &= 17 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 4x_5 &= 9 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 8x_5 &= 15 \end{aligned}$$

2. **BII.20. 17, 18, 25.** Gauss-módszerrel oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

   a)

$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\ x_1 - x_3 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

   c)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 3 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

3. **BII.20. 19*.** Hány megoldása van a következő egyenletrendszernek?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 2 \\ x_1 + x_4 + x_5 &= 1 \end{aligned}$$

4. **BII.20. 55*, 60*.** Adjuk meg a következő egyenletrendszerek megoldását a valós paraméterek függvényében. Mikor, hány megoldás van?

a)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 &= 0 \\ \lambda x_1 + x_2 + \mu x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 - ux_2 &= 2 \\ x_1 + vx_2 &= 2 \end{aligned}$$

5. **BII.19. 100, 102, 109.** Határozzuk meg a következő mátrixok inverzét (ha létezik) az adjungáltas módszerrel, illetve Gauss-eliminációval is:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -7 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

6. **BII.19. 104*.** Mutassuk meg, hogy az $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrix inverze az $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ mátrix, amennyiben $ad - bc \neq 0$.

7. **BII.19. 121.** Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{A}$ négyzetes mátrixra $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$ teljesül (ahol $\mathbf{0}$ a csupa nulla mátrix), akkor $\mathbf{E} - \mathbf{A}$ invertálható, és

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^{k-1}.$$

8. **BII.19. 122.** Legyen

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Mutassuk meg, hogy $\mathbf{T}_\alpha \mathbf{T}_\beta = \mathbf{T}_\beta \mathbf{T}_\alpha = \mathbf{T}_{\alpha+\beta}$, és $\mathbf{T}_\alpha^{-1} = \mathbf{T}_{-\alpha}$.

9. **BII.19. 123.** Egy négyzetes mátrixot ortogonálisnak nevezünk, ha $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{E}$, azaz $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$. Mutassuk meg, hogy ortogonális mátrix determinánsa ± 1.

10. **BII.19. 124.** Mutassuk meg, hogy tetszőleges 2×2-es ortogonális mátrix felírható a következő alakban:

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}.$$