Matematika A2a, 3. gyakorlat

Markó Zoltán

2011. február 23.

marzol89@gmail.com

1. Oldjuk meg sortranszformációkkal:

   a) Felírható-e az $x^3 + 7x^2 + 5$ polinom az $x^3 + 2$, $3x^3 + 4x$, $5x^2 + bx$ polinomok lineáris kombinációjaként?

   b) Az $\{a + b\cos x + c\cos^2 x \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ térben bázist alkot-e $\{1 + \cos x, \cos x + \cos^2 x, \cos 2x\}$?

2. Hány dimenziós

   a) $\mathbb{C}$ mint valós vektortér;

   b) $\mathbb{C}$ mint komplex vektortér;

   c) az összes 3×3-as bűvös négyzet vektortere (sorban, oszlopban, átlóban ugyanaz az összeg);

   d) $\mathbb{R}^3$-ben az $x + y + 3z = 0$ sík;

   e) $\mathbb{R}^3$-ben a $2x - 3y + z - 1 = 0$ sík;

   f) $\mathbb{R}^3$-ben a következő paraméteres egyenletrendszerrel adott egyenes ($t \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} x &= 2 + 3t \\ y &= -2t \\ z &= -1 + 5t \end{aligned}$$

   g) $\mathbb{R}^3$-ben az $\frac{x}{3} = y = -z$ egyenletű altér;

   h) $\mathbb{R}^4$-ben az $\left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \mid d = a + b, c = a - b \right\}$ altér?

3. Számítsuk ki a következő mátrixok rangját:

   a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$;

   b) $\begin{bmatrix} t & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & t \end{bmatrix}$ (t függvényében).

4. Mutassuk meg, hogy

$$\operatorname{rang} \mathbf{A} = 1 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}.$$

   (Ez az ún. diádszorzata két vektornak).

5. $\mathbf{A}$ mátrix elemei: $a_{ij} = 1 + (-1)^{i+j}$. Mennyi $\mathbf{A}$ rangja?

6. Oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszereket:

a)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + sx_3 &= 0 \\ x_1 + sx_2 + x_3 &= 0 \\ sx_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

s függvényében;

b)

$$\begin{aligned} 3x - y + 4z &= -1 \\ x + y - 2z &= 3 \\ 2x + z &= 1 \\ x + y &= -4 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

7. Bizonyítsuk be, hogy ha egy mátrixban a sorok is függetlenek és az oszlopok is, akkor a mátrix négyzetes.

8. Melyik állítás igaz?

a) Ha $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ megoldható, akkor $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ oszlopai lineárisan összefüggők.

b) Ha $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ oszlopai összefüggők, akkor létezik megoldás.

c) Ha $\mathbf{A}$ oszlopai függetlenek, akkor van megoldás.

d) Ha $\mathbf{A}$ sorai függetlenek, akkor van megoldás.

e) Ha egyértelműen létezik megoldás, akkor $\mathbf{A}$ oszlopai függetlenek.

f) Ha egyértelműen létezik megoldás, akkor $\mathbf{A}$ sorai függetlenek.

9. Fejtsük ki a következő determinánst valamely szimpatikus sora vagy oszlopa szerint:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

10. Számítsuk ki a következő determinánsokat sor- és oszloptranszformációkkal:

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}$.

11. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

$\det(\mathbf{A}^{-1}) =?$, $\det(\mathbf{A}^{80}) =?$, $\det(3\mathbf{A}) =?$, $\det(\mathbf{A} + \mathbf{E}) =?$, $\det(\mathbf{A}^T) =?$

12. Írjuk fel

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix inverzét $\frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{A}}$ alakban, ahol $\hat{\mathbf{A}}$ az A_{ij} előjeles aldeterminánsokból álló mátrix transzponáltja.

13. $\mathbf{B}$ adott $n \times n$-es mátrix. Legyen $V := \{\mathbf{A}\ n \times n\text{-es} \mid \mathbf{BA} = \mathbf{0}\}$. Bizonyítsuk be, hogy $\dim V$ osztható n-nel.