Matematika A2a, 2. gyakorlat

Markó Zoltán

2012. február 15.

marzol89@gmail.com

1. **BII.19. 36, 37.** A definíció segítségével számítsuk ki az alábbi determinánsokat:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

2. **BII.19. 38*.** Egy szimpatikus sora/oszlopa szerint kifejtve számítsuk ki a következő determinánsok értékét:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. **BII.19. 48, 50, 54.** Számítsuk ki a következő determinánsok értékét.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 8 & -1 & -8 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. **BII.19. 52, 53.** Számítsuk ki a következő determinánsokat:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \cdots & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a^2 & a^3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

5. **BII.19. 56.** Határozzuk meg a következő determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d+e & d^2+e^2 & d^3+e^3 \end{vmatrix}.$$

6. **BII.19. 63*, 64*.** A determináns értékének közvetlen kiszámítása nélkül igazoljuk, hogy

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \ln 10 & \ln 4 & \ln 40 \\ \ln 5 & \ln 4 & \ln 20 \\ \ln 2 & 0 & \ln 2 \end{vmatrix} = 0.$$

7. **BII.19. 66.** Mutassuk meg, hogy az $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 2$ módon definiált Fibonacci-sorozat n. eleme egyenlő az alábbi $n \times n$-es determinánssal:

$$a_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

8. **BII.19. 75.** Mutassuk meg, hogy az a, b, c oldalú háromszög T területére

$$T^2 = -\frac{1}{16} \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}.$$

9. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

$\det(\mathbf{A}^{80}) =?$, $\det(3\mathbf{A}) =?$, $\det(\mathbf{A} + \mathbf{E}) =?$, $\det(\mathbf{A}^T) =?$

10. **BII.19. 79.** Mutassuk meg, hogy az $(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)$ szorzat előállítható két négyzetszám összegeként, azaz

$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = z_1^2 + z_2^2$$

alakban, ahol z_1 és z_2 mindegyike külön az x_i és y_i változóknak is lineáris kifejezése.