Matematika A2a, 11. gyakorlat

Markó Zoltán

2011. április 20.

marzol89@gmail.com

1. Jellemezzük a következő halmazokat az alábbi szempontok alapján: belső pontok, határpontok, nyíltság, zártság.
   a) $[a,b]$ és $[a,b)$ $\mathbb{R}$-en és $\mathbb{R}^2$-en;
   b) $x^2+y^2<1$ és $x^2+y^2\le 1$ $\mathbb{R}^2$-en és $\mathbb{R}^3$-ön;
   c) $\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m} \mid n,m\ge 1, n,m\in\mathbb{Z}\right\}$ $\mathbb{R}$-en.
2. Határozzuk meg a következő függvények határértékét az origóban!
$$f(x,y)=\frac{x+2y}{3x-y},\quad g(x,y)=\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2},\quad h(x,y)=\frac{x^2\sqrt{y}}{x^4+y},\ \text{ha } y>0,\quad i(x)=\frac{x+y+2z}{x+xy-z}.$$
3. Számítsuk ki a következő határértékeket!
$$\lim_{\substack{x\to 0+0\\ y\to 1-0}}\frac{x+y-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-y}},\qquad \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2},\qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to\infty}} x\cos y,$$
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}.$$
4. Vizsgáljuk a következő határértékeket úgy, hogy kiszámoljuk a $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}$ és a $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}$ határértékeket is!
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy+x-y}{xy+x+y},\qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y),\ \text{ahol } f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, & \text{ha } xy\ne 0,\\ 0, & \text{ha } xy=0.\end{cases}$$
5. Hol folytonosak a következő függvények?
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\ne(0,0),\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0);\end{cases}\qquad g(x,y)=\begin{cases}1, & \text{ha } x<1,\\ xy, & \text{ha } x\ge 1;\end{cases}$$
$$h(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y)\ne(0,0),\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$
6. Milyen c-re lesz folytonos az
$$f(x,y)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\ne(0,0),\\ c, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
   függvény?
7. Határozzuk meg a következő függvények parciális deriváltjait!

a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $(1,2)$-ben és $(0,0)$-ban;

b) $g(x,y)=\begin{cases} \frac{(x+1)y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ esetén mindenütt;

c) $h(x,y)=\begin{cases} \frac{(x+2)^2y}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0) \\ 3, & \text{ha } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ esetén $(0,0)$-ban.

8. a) Határozzuk meg $f(x,y,z)=x^{\frac{y}{z}}$ esetén $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, illetve $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ értékét.

b) Mutassuk meg, hogy a

$$g(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

függvény esetében $g''_{xy}(0,0)\neq g''_{yx}(0,0)$.

9. Mutassuk meg, hogy ha $f(x,y)=xe^x\cos y$, akkor

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}=0.$$

10. Hol deriválhatóak totálisan a következő függvények?

$$f(x,y)=\frac{xy}{(x^2+1)e^y};\quad g(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0); \end{cases}$$

$$h(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0); \end{cases}\qquad i(x)=\begin{cases} x^2y^2\operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & \text{ha } x\neq 0, \\ 0, & \text{ha } x=0. \end{cases}$$

11. a) Legyen $f(x,y,z)=xyz$, $x=\ln(u+v)$, $y=u^2+3v$, $z=2uv$. $f'_u=?$

b) $\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x^2y)=?$

c) Legyen $h(x,y)=xg_1(y-x)+yg_2(x-y)$. $h''_{xx}+2h''_{xy}+h''_{yy}=?$

12. Határozzuk meg a gradiensvektorokat az adott pontokban!

a) $f(x,y)=x^2+\operatorname{tg}(xy)$, $\operatorname{grad} f\left(1,\frac{\pi}{4}\right)=?$

b) $g(x,y,z)=ze^{-x}\operatorname{tg} y$, $\operatorname{grad} g(0,\pi,-2)=?$

c) grad $\sin(|\mathbf{r}|)$ a $(0,\sqrt{\pi},0)$ pontban, ha $\mathbf{r}$ a helyvektor.

13. Írjuk fel az $f(x,y)=\frac{x}{1+\ln(xy)}$ által meghatározott felület érintősíkjának egyenletét az $(1,e)$ pontban.

14. a) Legyen

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0), \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Határozzuk meg f iránymenti deriváltját az $(1,1)$ vektor irányában, a $(0,0)$ pontban.

b) Határozzuk meg $g(x,y)=x^2y$ $(3,4)$ irányú deriváltját a $(0,1)$ pontban.