Matematika A2a, 1. gyakorlat

Markó Zoltán

2012. február 8.

marzol89@gmail.com

1. **BII.19. 1, 2, 3, 4.** Végezzük el az alábbi mátrix műveleteket, ha azok végrehajthatók:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. **BII.19. 12.** Ha $\mathbf{A}$ $n \times m$ típusú, és $\mathbf{ABA}$ értelmezve van, akkor mi $\mathbf{B}$ típusa?

3. **BII.19. 13.** Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{AB}$ és $\mathbf{BA}$ értelmezve vannak, akkor $\mathbf{AB}$ és $\mathbf{BA}$ is négyzetesek.

4. **BII.19. 16*, 18*.** Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

   a) $\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_k \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_k^n \end{bmatrix}$;

   b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

   c) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$;

   d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix}$, ahol $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, ha $n > 1$, a Fibonacci-számok.

5. **BII.19. 20*.** Mutassuk meg, hogy az alábbi egyenlőségek nem azonosságok:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}; \quad (\mathbf{AB})^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2; \quad (\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2.$$

6. **BII.19. 21.** Milyen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ mátrixok esetén teljesül az $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$ egyenlőség?

7. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$. Keressük meg azt az $\mathbf{x}$ oszlopvektort, melyre $\mathbf{Ax}$

   a) az $\mathbf{A}$ 2. oszlopa;

   b) az $\mathbf{A}$ 2. oszlopának és az 1. oszlop 3-szorosának különbsége.
   Keressük meg azt az $\mathbf{y}$ sorvektort, melyre $\mathbf{yA}$

   c) az $\mathbf{A}$ 3. sora;

   d) az $\mathbf{A}$ 2. sorának és az 1. sorának a különbsége;

   e) az $\mathbf{A}$ 1. sorából kivonva a másik kettőt.
   Keressük meg azt az $\mathbf{X}$ mátrixot, ahol $\mathbf{AX}$ úgy áll elő, hogy

   f) $\mathbf{A}$ 2. oszlopát szorozzuk 4-gyel;

g) felcseréljük $\mathbf{A}$ oszlopait;

h) $\mathbf{A}$ első oszlopához hozzáadjuk a második 5-szörösét.

Keressük meg azt azt az $\mathbf{Y}$ mátrixot, ahol $\mathbf{YA}$ úgy áll elő, hogy

i) $\mathbf{A}$ első két sora felcserélődik;

j) $\mathbf{A}$ 3. sorát szorozzuk -1-gyel;

k) $\mathbf{A}$ 3. sorához hozzáadjuk az első sor hétszeresét és a második sort is.

8. **BII.19. 34.** Legyen $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ és $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{n\times n}$ két valós elemű négyzetes mátrix. Számítsuk ki az $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ és az $\mathbf{E}$ mátrixok főátlóbeli elemeinek összegét, és ennek segítségével mutassuk meg, hogy az $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \mathbf{E}$ semmilyen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ mátrix esetén nem teljesülhet.

9. **BII.19. 35.** Jelölje egy komplex elemű négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix konjugáltjának transzponáltját $\mathbf{A}^*$, vagyis $\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^T$. Mutassuk meg, hogy $(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$, $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*$, $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$.

10. Egy egyszerű gráf adjacencia-mátrixa $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, ahol $a_{ij} = 1$, ha az i. és j. csúcs között fut él, és 0 különben. Legyen $\mathbf{A}^2 = [a_{ij}^{(2)}]$. Mutassuk meg, hogy ekkor $a_{ij}^{(2)}$ az i. és j. csúcs közti 2 hosszú utak száma. Általánosítsunk.