Matematika A1a - analízis, 2. gyakorlat

Markó Zoltán

2012. szeptember 11.

marzol89@gmail.com

Adjuk meg a következő halmazok elemeit.

1. B.I/2.1. $\{x \in \mathbb{N}^+ : 2|x \text{ és } 100 \leq x < 1000\}$.

2. B.I/2.3. $\{k \in \mathbb{N}^+ : x = 3k + 1\}$.

3. B.I/2.6. $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 - 2 = 0\}$.

4. B.I/2.8. $\{x \in \mathbb{R} : \sin^2 x + \cos^2 x = 1\}$.

5. B.I/2.9. $\{x \in \mathbb{R} : 2 \lg x = \lg x^2\}$.

Az (x, y), illetve az (x_n, y_n) számpárokat az xy-koordinátasík pontjainak tekintve, milyen geometriai alakzatoknak felelnek meg a következő halmazok?

6. B.I/2.12. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

7. B.I/2.14. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < y \leq 1\}$.

8. B.I/2.15. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x - 4y = 4\}$.

9. B.I/2.19. $\{(x_n, y_n), n \in \mathbb{N}^+ : x_n = 2^{-n}, y_n = 0\}$.

10. B.I/2.21. $\{(x, y) : x = t^2, y = 3t^2, t \in \mathbb{R}\}$.

11. B.I/2.23. $\{(x, y) : x = \cos t, y = \sin t, 0 < t \leq 2\pi\}$.

12. B.I/2.27. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak. Válaszunkat igazoljuk!

a) Minden A, B halmazpárra $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

b) Minden A halmazra $A \subseteq A$.

c) Minden A halmazra $\emptyset \subseteq A$.

d) Van olyan A halmaz, hogy $A \subset \emptyset$.

13. B.I/2.31. Igaz-e a következő egyenlőség tetszőleges K, L, M halmazokra?

$$(M \cup K) \cap L = (M \cup L) \cap K.$$

Ha igaz, akkor bizonyítsuk be, ha nem, akkor adjunk meg három olyan halmazt, amire az előbbi egyenlőség nem teljesül.

14. B.I/2.33. Bizonyítsuk be, hogy az A, B, C halmazokra $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $A \subseteq C$.

15. B.I/2.49. Mutassuk meg, hogy $(A \cap \overline{B}) \triangle (\overline{A} \cap B) = A \triangle B$.

16. B.I/2.52. Adott A, B halmazok esetén keressük meg az összes olyan halmazt, amelyre $A \setminus (B \setminus X) = A$.

17. B.I/2.58. Írjuk fel a $H = \{a, b, c\}$ halmaz hatványhalmazát.

18. B.I/2.59. Adjuk meg $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ elemeit.

Az alábbi halmazok mindegyikében véges sok elem van, jelölje $|M|$ az M halmaz elemeinek számát. Igazoljuk a övetkező állításokat!

19. B.I/2.63. $|A| \leq |B|$, ha $A \subseteq B$.

20. B.I/2.65. $|A \cap B| \leq \min\{|A|, |B|\}$.

21. B.I/2.67. Szita-formula három halmazra:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

22. B.I/2.69. Egy 33 fős tankörben háromféle idegen nyelven beszélnek: 20 diák tud angolul, 16 németül és 6 franciául, 5 diák tud pontosan két nyelven, és 2 diák tud mindhárom nyelven beszélni. Hányan tudnak pontosan egy idegen nyelven beszélni, és hányan nem tudnak egy idegen nyelven sem?

23. B.I/2.71. Bizonyítsuk be, hogy ha $|A| = n$, ahol n véges természetes szám, akkor $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

24. B.I/2.72. Mutassuk meg, hogy nincs olyan A halmaz, amelyhez létezne A és $\mathcal{P}(A)$ elemei között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés. (Útmutatás: tegyük fel, hogy van ilyen kölcsönösen egyértelmű $\varphi : A \to \mathcal{P}(A)$ leképezés, és vizsgáljuk az $X := \{y \in A : y \notin \varphi(y)\}$ halmaz elemeit.)