Matematika A1a - analízis, 1. gyakorlat

Markó Zoltán

2012. szeptember 4.

marzol89@gmail.com

Bizonyítsuk be a következő állításokat teljes indukcióval.

1. B.I/1.104. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, ha $n \geq 1$ egész.

2. B.I/1.113. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, ha $n \geq 1$ egész.

3. B.I/1.115. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, ha $n \geq 2$ egész.

4. B.I/1.119. $3^n > 2^n + 7n$, ha $n \geq 4$ egész.

5. B.I/1.121. $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$, ahol $n \geq 1$ egész, és a bal oldalon n db gyök van.

6. B.I/1.123. Egy síkbeli tartományt n db egyenessel részekre osztunk. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott térkép két színnel színezhető úgy, hogy közös oldallal rendelkező részek különböző színűek legyenek.

7. B.I/1.125. Bizonyítsuk be, hogy $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$, ahol $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

8. B.I/1.130. $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, ahol $n \geq 2$ egész.

9. B.I/1.131. $8 | 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$, ha $n \geq 1$ egész.

10. B.I/1.135. Hol a hiba a következő érvelésben? Megmutatjuk, hogy minden egész szám egyenlő. Ehhez megmutatjuk, hogy minden egész egyenlő a rákövetkező egésszel. Tegyük fel, hogy az állítás igaz n-re: $n = n + 1$. Ekkor, az indukciós feltétel felhasználásával $n + 1$-re: $n + 1 = n + 1 + 1 = (n + 1) + 1$, vagyis az állítás igaz $n + 1$-re is, így a teljes indukció elve alapján minden egész számra.

Igazoljuk a következő logikai azonosságokat.

11. B.I/3.16. $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$, $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$.

12. B.I/3.18. $p \vee (\neq p \wedge q) \equiv p \vee q$.

13. B.I/3.23. $(p \Rightarrow q) \vee (q \rightarrow p) \equiv 1$.

14. B.I/3.24. $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q \equiv 1$.

15. B.I/3.29. $(p \wedge q \wedge r) \Rightarrow s \equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow (r \Rightarrow s))$.

Állítsuk elő az alábbi ítéleteket a logikai műveletek és tovább már nem egyszerűsíthető elemi ítéletek segítségével. Ahol lehet, hozzuk a kifejezést egyszerűbb alakra.

16. B.I/3.32. Márta nem szőke.

17. B.I/3.33. Nem igaz, hogy Mátyás nem elég virtuóz.

18. B.I/3.38. Kizárt, hogy sem matekból, sem fizikából nem megyek át elsőre.

Legyen x és y tetszőleges pozitív természetes szám, és definiáljuk a következő kijelentéseket:

$$T(x) : x \text{ prímszám}, \quad P(x) : x \text{ páros szám}, \quad S(x, y) : x \text{ osztója } y\text{-nak}.$$

Mi a következő ítéletek logikai értéke?

19. B.I/3.44. $T(7)$.

20. B.I/3.46. $\exists x T(x)$.

21. B.I/3.47. $\forall y \exists x S(x, y)$.

22. B.I/3.51. $\exists x \exists y (S(x, y) \Rightarrow y < x)$.

Legyen x tetszőleges négyszög, és definiáljuk a következő kiejeltéseket:

$$p(x) : x \text{ húrnégyszög}, \quad q(x) : x \text{ téglalap}, \quad r(x) : x \text{ szemközti szögeinek összege } 180^\circ.$$

Fogalmazzuk meg a következő összetett ítéleteket, majd határozzuk meg azok logikai értékét.

23. B.I/3.54. $\forall x (p(x) \Rightarrow q(x))$.

24. B.I/3.55. $\forall x (q(x) \Rightarrow p(x))$.

25. B.I/3.57. $\forall x (p(x) \Leftrightarrow r(x))$.

Írjuk fel logikai műveletek és kvantorok segítségével az alábbi állításokat, majd tagadjuk őket.

26. B.I/3.63. „Ki nem szólt, csak bégetett, / Az kapott dicséretet." (Weöres Sándor)

27. B.I/3.64. Minden pozitív ε valós számra van olyan δ pozitív valós szám, hogy minden x valós számra, ha $|x - a| < \delta$ teljesül, akkor $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.